第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0845-09 **文献标识码**: **A**

一类非线性桥梁方程解的多重性

燕艳菊[1], 金正国[2]
(1. 安阳工学院理学部, 河南 安阳 455000; 2. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024)
(E-mail: yjyan117340@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文主要利用变分方法得出一类非线性桥梁方程 $Lu+bu^+-au^-=1+\varepsilon h(x,t)$ 在 H 中至少存在三个解, 其中 $3<a,b<15$.

关键词: 特征值; 临界点; 变分方法.
MSC(2000): 35Q72
中图分类: O175.29

1 引言和主要结果

本文我们主要研究一类非线性桥梁模型方程

$$\begin{aligned} u_{tt}+u_{xxxx}+bu^+-au^-=1+\varepsilon h(x,t), \quad (x,t)\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times R,\\ u(\pm\frac{\pi}{2},t)=u_{xx}(\pm\frac{\pi}{2},t)=0,\\ u(x,t)=u(-x,t)=u(x,t+\pi) \end{aligned} \tag{1}$$

解的多重性, 并证明了当 $3<a,b<15$ 时, 方程至少存在三个解.

证明的主要思想是利用变分方法把无限维希尔伯特空间中的问题等价的转化为有限维的问题. 这些方法最早出现在文献 [3, 4] 中, 后来在文献 [1] 中被推广.

设 L 是微分算子

$$Lu=u_{tt}+u_{xxxx}.$$

则特征值问题

$$\begin{aligned} Lu=&\lambda u,\\ u(\pm\frac{\pi}{2},t)=&u_{xx}(\pm\frac{\pi}{2},t)=0,\\ u(x,t)=&u(-x,t)=u(x,t+\pi), \end{aligned} \tag{2}$$

有无穷多个特征值

$$\lambda_{mn}=(2n+1)^4-4m^2,\quad m,n=0,1,2\ldots,$$

对应的正交化的特征函数 φ_{mn},ψ_{mn} 为

$$\varphi_{0n}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos(2n+1)x,\quad n\geq 0,$$

收稿日期: 2006-07-11; **接受日期**: 2007-01-17
基金项目: 国家自然科学基金 (10471018).

$$\varphi_{mn} = \frac{2}{\pi}\cos 2mt\cos(2n+1)x, \quad m>0, n\geq 0,$$
$$\psi_{mn} = \frac{2}{\pi}\sin 2mt\cos(2n+1)x, \quad m>0, n\geq 0.$$

介于区间 $(-19,45)$ 的特征值为

$$\lambda_{20}=-15<\lambda_{10}=-3<\lambda_{00}=1<\lambda_{41}=17.$$

设 Q 为区域 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, H_0 为希尔伯特空间

$$H_0=\{u\in L^2(Q): u(x)=u(-x)\}.$$

定义 H_0 的子空间 $H=\{u\in H_0: u=\sum(h_{mn}\varphi_{mn}+\widetilde{h}_{mn}\psi_{mn}), \sum|\lambda_{mn}|(h_{mn}^2+\widetilde{h}_{mn}^2)<\infty\}$, 赋予范数

$$|||u|||=[\sum|\lambda_{mn}|(h_{mn}^2+\widetilde{h}_{mn}^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

那么，这个赋范的空间是完备的.

令 V 为 H 的由 φ_{10} 和 ψ_{10} 张成的二维子空间，它们所对应的特征值为 $\lambda_{10}=-3$, 则对所有的 $v\in V$, 有 $|||v|||=\sqrt{3}\|v\|$. 假设 W 为 V 在 H 中的正交补空间. 本文主要的结果为

定理 1.1 设 $h\in W, |||h|||=1$, 且 $3<a,b<15$. 那么存在 $\varepsilon_0>0$ (依赖于 h,b) 使得当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, 问题 (1) 在 H 中至少存在三个解.

2 主要结果的证明

在 H 上定义泛函

$$I_b(u)=\int_Q[\frac{1}{2}(-|u_t|^2+|u_{xx}|^2)+\frac{b}{2}|u^+|^2+\frac{a}{2}|u^-|^2-u-\varepsilon h(x,t)u]\mathrm{d}t\mathrm{d}x. \tag{3}$$

引理 2.1 I_b 在 H 上是 Fréchet 可导的.

引理 2.2 令 $a,b>-1$, 且 b 不是 L 的特征值， $h\in H$ 且 $|||h|||=1$. 则存在 $\varepsilon_0>0$ (依赖于 b 和 h), 使得当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时，问题 (1) 在 H 中存在一个正解.

证明 由文献 [6] 容易得到引理 2.2.

设 $P:H\to V$ 是从 H 到 V 的正交投影， $I-P:H\to W$ 是从 H 到 W 的正交投影.

引理 2.3 令 $3<a, b<15$, $h\in W$, $|||h|||=1$, $v\in V$, 则对 $\varepsilon>0$, 方程

$$Lz+(I-P)[b(v+z)^+-a(v+z)^--1-\varepsilon h(x,t)]=0 \tag{4}$$

存在唯一解 $z\in W$. 令 $z=\theta(v)$, 则 θ 在 V 上是连续的，且对 $\forall w\in W$, 有 $DI_b(v+\theta(v))(w)=0$. 定义 $\tilde{I}_b: V\to R$ 为 $\tilde{I}_b(v)=I_b(v+\theta(v))$, 则 $\tilde{I}_b$ 关于 v 有连续的 Fréchet 导数，且

$$D\tilde{I}_b(v)(h)=DI_b(v+\theta(v))(h), \quad \forall h\in V.$$

若 v_0 是 $\tilde{I}_b$ 的临界点，则 $v_0+\theta(v_0)$ 是方程 (1) 的解；相反，方程 (1) 的每一个解都有这种形式. 特别， $\theta(v)$ 关于 v 的 L^2 范数和范数 $|||\cdot|||$ 均满足一致 Lipschitz 条件.

证明 设 $3 < a, b < 15$, $\delta = 7$, $g(u) = bu^+ - au^-$, $g_1(u) = g(u) - \delta u$, 那么方程 (4) 等价于

$$z = (L+\delta)^{-1}(I-P)[-g_1(v+z) + 1 + \varepsilon h(x,t)]. \tag{5}$$

$(L+\delta)^{-1}(I-P)$ 在 W 中的特征值为 $(\lambda_{mn}+\delta)^{-1}$, 而 $\lambda_{mn} \geq 1$ 或 $\lambda_{mn} \leq -15$, 所以 $\|(L+\delta)^{-1}(I-P)\| = \frac{1}{8}$. 因为

$$|g_1(u_2) - g_1(u_1)| \leq \max\{|b-\delta|, |a-\delta|\}|u_2 - u_1| < 8|u_2 - u_1|,$$

所以，方程 (5) 的右端算子定义了一个 $(I-P)H_0$ 到 $(I-P)H_0$ 的 Lipschitz 映射， Lipschitz 常数 $\gamma < 1$. 所以，由压缩映象原理，对固定的 $v \in V$, 方程 (5) 存在唯一的 $z \in (I-P)H_0$ (当然， z 也属于 $(I-P)H$).

下面证 θ 是连续的. 令 $z_1 = \theta(v_1), z_2 = \theta(v_2)$, 则

$$\begin{aligned}
\|z_1 - z_2\| &= \|(L+\delta)^{-1}(I-P)(-g_1(v_1+z_1) + g_1(v_2+z_2))\| \\
&= \|(L+\delta)^{-1}(I-P)[(\delta-b)(v_1+z_1)^+ + (a-\delta)(v_1+z_1)^-]- \\
&\quad [(\delta-b)(v_2+z_2)^+ + (a-\delta)(v_2+z_2)^-])\| \\
&\leq \gamma\|(v_1+z_1) - (v_2+z_2)\| \leq \gamma(\|v_1 - v_2\| + \|z_1 - z_2\|).
\end{aligned}$$

所以可得

$$\|z_1 - z_2\| \leq c(\|v_1 - v_2\|), \quad c = \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

由上述不等式，可得

$$\begin{aligned}
|||z_1 - z_2||| &= |||(L+\delta)^{-1}(I-P)(-g_1(v_1+z_1) + g_1(v_2+z_2))||| \\
&= |||(L+\delta)^{-1}(I-P)([(-b)(v_1+z_1)^+ + a(v_1+z_1)^- + \delta(v_1+z_1)]- \\
&\quad [(-b)(v_2+z_2)^+ + a(v_2+z_2)^- + \delta(v_2+z_2)])||| \\
&\leq \frac{1}{2}\|(I-P)([(-b)(v_1+z_1)^+ + a(v_1+z_1)^- + \delta(v_1+z_1)]- \\
&\quad [(-b)(v_2+z_2)^+ + a(v_2+z_2)^- + \delta(v_2+z_2)])\| \\
&\leq 4(\|v_1 - v_2\| + \|z_1 - z_2\|) \leq \frac{4}{\sqrt{3}}(c+1)|||v_1 - v_2|||.
\end{aligned}$$

令 $v \in V$, $z = \theta(v)$. 若 $w \in W$, 从 (4) 式可以看到

$$\int_Q (-z_t w_t + z_{xx} w_{xx} + b(v+z)^+ w - a(v+z)^- w - w - \varepsilon h(x,t) w) \mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0.$$

又因为

$$\int_Q v_t w_t = 0, \quad \int_Q v_{xx} w_{xx} = 0,$$

所以有

$$DI_b(v + \theta(v))(w) = 0, \quad w \in W. \tag{6}$$

令 W_1 为对应特征值 $\lambda_{mn} \le -15$ 的特征函数 φ_{mn}, ψ_{mn} 张成的 H 的子空间, 令 W_2 为对应特征值 $\lambda_{mn} \ge 1$ 的特征函数 φ_{mn}, ψ_{mn} 张成的 H 的子空间. 令 $v \in V$, 定义泛函 $h: W_1 \times W_2 \to R$

$$h(w_1, w_2) = I_b(v + w_1 + w_2).$$

泛函 h 有连续的偏导数 D_1h 和 D_2h,

$$D_ih(w_1, w_2)(y_i) = DI_b(v + w_1 + w_2)(y_i), \quad y_i \in W_i, \ i = 1, 2.$$

所以，若令 $\theta(v) = \theta_1(v) + \theta_2(v)$, $\theta_i(v) \in W_i$, 从 (6) 式可以得到

$$D_ih(\theta_1(v), \theta_2(v)) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{7}$$

若 $w_2, y_2 \in W_2$, $w_1 \in W_1$, 则

$$\begin{aligned}
&[D_2h(w_1, w_2) - D_2h(w_1, y_2)](w_2 - y_2) = (DI_b(v + w_1 + w_2) - DI_b(v + w_1 + y_2))(w_2 - y_2) \\
&\quad = \int_Q [-|(w_2 - y_2)_t|^2 + |(w_2 - y_2)_{xx}|^2 + b((v + w_1 + w_2)^+ - \\
&\qquad (v + w_1 + y_2)^+)(w_2 - y_2) - a((v + w_1 + w_2)^- - (v + w_1 + y_2)^-)(w_2 - y_2)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_Q [-|(w_2 - y_2)_t|^2 + |(w_2 - y_2)_{xx}|^2 + (g(v + w_1 + w_2) - g(v + w_1 + y_2))(w_2 - y_2)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因为，对任意的 u_2, u_1, 有 $(g(u_2) - g(u_1))(u_2 - u_1) \ge 0$, 且

$$\int_Q [-|(w_2 - y_2)_t|^2 + |(w_2 - y_2)_{xx}|^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \||w_2 - y_2\||,$$

所以

$$[D_2h(w_1, w_2) - D_2h(w_1, y_2)](w_2 - y_2) \ge \||w_2 - y_2\||.$$

于是， h 关于第二个变量是严格凸的. 同样，由 $(g(u_2) - g(u_1))(u_2 - u_1) \le \max\{a, b\}(u_2 - u_1)^2$ 知，若 $w_1, y_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, 则

$$\begin{aligned}
&[D_1h(w_1, w_2) - D_1h(y_1, w_2)](w_1 - y_1) \le -\||w_1 - y_1\||^2 + \max\{a, b\}\|w_1 - y_1\|^2 \\
&\quad \le (-1 + \frac{\max\{a, b\}}{15})\||w_1 - y_1\||^2.
\end{aligned}$$

这里， $-15 + \max\{a, b\} < 0$. 所以， h 关于第一个变量是严格凹的. 从 (7) 式可知

$$I_b(v + \theta_1(v) + \theta_2(v)) \le I_b(v + \theta_1(v) + y_2), \tag{8}$$

这里 $y_2 \in W_2$, 当且仅当 $y_2 = \theta_2(v)$ 时等号成立. 同样，从 (7) 式可知

$$I_b(v + \theta_1(v) + \theta_2(v)) \ge I_b(v + y_1 + \theta_2(v)), \tag{9}$$

这里 $y_1 \in W_1$, 当且仅当 $y_1 = \theta_1(v)$ 时等号成立.

既然， h 关于第一 (二) 个变量是严格凹 (凸) 的，由文献 [2] 中的定理 2.3 知 $\tilde{I}_b$ 关于 v 是可导的，且有

$$D\tilde{I}_b(v)(h) = DI_b(v + \theta(v))(h), \quad h \in V. \tag{10}$$

假定存在 $v_0 \in V$, 使得 $D\tilde{I}_b(v_0) = 0$. 从 (10) 式知 $DI_b(v_0 + \theta(v_0))(v) = 0, \forall v \in V$. (6) 式对 $\forall w \in W$ 成立，而 H 又是 V 和 W 的直和，所以，在 H 中 $DI_b(v_0 + \theta(v_0)) = 0$, 所以，$u = v_0 + \theta(v_0)$ 就是 (1) 式的解.

相反，由我们的推理过程知，若 u 是方程 (1) 的解， $v = Pu$, 那么在 V 中 $D\tilde{I}_b(v) = 0$.

下面证 $\theta(v)$ 满足一致 Lipschitz 条件. 令 $v_1, v_2 \in V$, $z_k = \theta(v_k)$, $k = 1, 2$. 从 (5) 式中知

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 =& (L+\delta)^{-1}(I-P)(-g_1(v_1+z_1) + g_1(v_1+z_2)) + \\ & (L+\delta)^{-1}(I-P)(-g_1(v_1+z_2) + g_1(v_2+z_2)), \end{aligned}$$

这里， $\delta = 7$, 又知 $|g_1(u_2) - g_1(u_1)| \le \max\{|b-\delta|, |a-\delta|\}|u_2 - u_1|$,

$$r = \max\{(\lambda_{mn}+\delta)^{-1} : \lambda_{mn} \ge 1, \lambda_{mn} \le -15\} = \|(L+\delta)^{-1}(I-P)\| = \frac{1}{8},$$

$\gamma = r\max\{|b-\delta|, |a-\delta|\} < 1$, 所以

$$\|z_1 - z_2\| \le \gamma\|z_1 - z_2\| + \gamma\|v_1 - v_2\|,$$

于是

$$\|\theta(v_1) - \theta(v_2)\| \le k\|v_1 - v_2\|, \quad k = \gamma(1-\gamma)^{-1}.$$

引理 2.3 证明完毕. □

令 $h \in W$, $|||h||| = 1$, $3 < a, b < 15$. 从引理 2.2 知，存在充分小的 $\varepsilon_0 > 0$ (依赖于 h, b), 使得若 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, 则方程 (1) 有一个正解 u_0, 且 $u_0 \in W$. 由引理 2.3, u_0 可写成 $u_0 = v_0 + \theta(v_0)$, $v_0 \in V$. 既然，正解 $u_0 \in W$, 所以 $v_0 = 0$, 所以有 $u_0 = 0 + \theta(0)$.

引理 2.4 令 $3 < a, b < 15$, $h \in W$, $|||h||| = 1$, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ (依赖于 b 和 h) 以及 0 在 V 中的一个开邻域 B, 使得对 $\forall \varepsilon$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, 在 B 中 $v = 0$ 是 $\tilde{I}_b$ 的一个极小值点.

证明 对 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, 方程 (1) 有一个正解 u_0, 且 $u_0 = 0 + \theta(0)$. 令 I 是 V 上的恒同映射，由于 $I + \theta$ 是连续的，所以 0 在 V 内存在一个开邻域 B, 使得对 $v \in B$, 有 $v + \theta(v) > 0$. 此时，把 $v + \theta(v)$ 代入方程 (4), 可知在 B 中有 $\theta(v) = \theta(0)$. 若令 $v \in B$, 则对 $z = \theta(v)$, 有

$$\begin{aligned} \tilde{I}_b(v) =& I_b(v+z) \\ =& \int_Q [\frac{1}{2}(-|(v+z)_t|^2 + |(v+z)_{xx}|^2) + \frac{b}{2}|(v+z)^+|^2 + \\ & \frac{a}{2}|(v+z)^-|^2 - (v+z) - \varepsilon h(x,t)(v+z)]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ =& \int_Q [\frac{1}{2}(-|v_t|^2 + |v_{xx}|^2) + \frac{b}{2}v^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \\ & \int_Q (-z_t v_t + z_{xx}v_{xx} + bvz - v - \varepsilon h(x,t)v)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \\ & \int_Q [\frac{1}{2}(-|z_t|^2 + |z_{xx}|^2) + \frac{b}{2}z^2 - z - \varepsilon h(x,t)z]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ =& \int_Q [\frac{1}{2}(-|v_t|^2 + |v_{xx}|^2) + \frac{b}{2}v^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x + C. \end{aligned}$$

这里,

$$C=\int_Q[\frac{1}{2}(-|z_t|^2+|z_{xx}|^2)+\frac{b}{2}z^2-z-\varepsilon h(x,t)z]\mathrm{d}t\mathrm{d}x=I_b(z)=\tilde{I}_b(0).$$

若 $v\in V$, 则 $v=c_{10}\varphi_{10}+\acute{c}_{10}\psi_{10}$, 且 φ_{10} 和 ψ_{10} 对应的特征值为 $\lambda_{10}=-3$. 所以, 在 B 中

$$\tilde{I}_b(v)-\tilde{I}_b(0)=\int_Q[\frac{1}{2}(-|v_t|^2+|v_{xx}|^2)+\frac{b}{2}v^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(-3+b)\int_Q v^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

又由 $3<a,b<15$, 所以 $v=0$ 是 $\tilde{I}_b$ 的一个极小值点.

引理 2.5 令 $h\in H$, $|||h|||=1$. 对 $-1<a,\ b<15$ 和 $\varepsilon\in[-1,1]$, 泛函 $\tilde{I}_b$ 满足 [P.S.] 条件: 对任意的序列 $\{v_n\}\subset V$, 若 $\tilde{I}_b(v_n)$ 是有界的, 且 $D\tilde{I}_b(v_n)\to 0$, 则序列 $\{v_n\}$ 有收敛的子序列.

证明 易证, 略.

在 H 上定义泛函

$$I_b^*(u)=\int_Q\frac{1}{2}[(-|u_t|^2+|u_{xx}|^2)+\frac{b}{2}|u^+|^2+\frac{a}{2}|u^-|^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

事实上, 对 $-1<a,b<15$, 方程 $Lu+bu^+-au^-=0$ 只有平凡解 [5], 所以, $I_b^*(u)$ 只有一个临界点 $u=0$. 令 $-1<a,\ b<15$, 对于给定的 $v\in V$, 令 $\theta^*(v)\in W$ 是方程

$$Lz+(I-P)(b(v+z)^+-a(v+z)^-)=0$$

的唯一解. 在 V 上定义泛函 $\tilde{I}_b^*(v)=I_b^*(v+\theta^*(v))$. 明显, 当我们用 $\theta^*(v)$, $\tilde{I}_b^*(v)$ 代替 $\theta(v)$, $\tilde{I}_b(v)$ 可以得到与引理 2.3 相同的结果. 所以, 当 $-1<a,\ b<15$ 时, $\tilde{I}_b^*(v)$ 只有一个临界点 $v=0$.

引理 2.6 对 $3<a,\ b<15$, 任意 $v\in V$, $v\neq 0$, 有 $\tilde{I}_b^*(v)<0$.

引理 2.7 令 $3<a,\ b<15$, $h\in W$, $|||h|||=1$, 则当 $\|v\|\to\infty$ 时 $\tilde{I}_b(v)\to-\infty$ ($|||v|||=\sqrt{3}\|v\|$).

证明 在引理 2.6 知对所有的 $v\neq 0$, 有 $\tilde{I}_b^*(v)<0$. 假设当 $\|v\|\to\infty$ 时 $\tilde{I}_b(v)\to-\infty$ 是不成立的. 即在 V 中存在序列 $\{v_n\}_1^\infty$ 和常数 $M<0$, 使得当 $n\to\infty$ 时, $\|v_n\|\to\infty$ 且 $\tilde{I}_b(v_n)\geq M$.

对给定的 $v_n\in V$, 令 $w_n=\theta(v_n)$ 是方程

$$Lw+(I-P)(b(v_n+w)^+-a(v_n+w)^--1-\varepsilon h(x,t))=0$$

的唯一解. 由引理 2.3 知, 存在常数 k 使得

$$\|\theta(v_n)-\theta(0)\|\leq k\|v_n\|,\quad |||\theta(v_n)-\theta(0)|||\leq k|||v_n|||.$$

从上式可知, 在 H 中 $\{\frac{w_n+v_n}{\|v_n\|}\}$ 是有界的. 令 $z_n=v_n+w_n, v_n^*=\frac{v_n}{\|v_n\|}$, $w_n^*=\frac{w_n}{\|v_n\|}$, $z_n^*=v_n^*+w_n^*$, $n\geq 1$. 则对 $w_n=\theta(v_n), w_n^*=\frac{w_n}{\|v_n\|}$ 有

$$w_n^*=L^{-1}(I-P)(-b(\frac{w_n+v_n}{\|v_n\|})^++a(\frac{w_n+v_n}{\|v_n\|})^-+\frac{1}{\|v_n\|}+\frac{\varepsilon h(x,t)}{\|v_n\|}).$$

既然 $\{\frac{w_n+v_n}{\|v_n\|}\}$ 是有界的, 当 $\|v_n\|\to\infty$ 时, $\frac{1}{\|v_n\|}+\frac{\varepsilon h(x,t)}{\|v_n\|}\to 0$, 所以 $-b(\frac{w_n+v_n}{\|v_n\|})^++a(\frac{w_n+v_n}{\|v_n\|})^-+\frac{1}{\|v_n\|}+\frac{\varepsilon h(x,t)}{\|v_n\|}$ 在 H 中是有界的. 由于 L^{-1} 是紧算子, 所以, 在 W 中 $\{w_n^*\}$ 有收敛的子列, 我

们不妨就设在 W 中 $w_n^* \to w^*$, 序列 $\{v_n^*\}_1^\infty$ 收敛于 $v^* \in V$, 且 $\|v^*\| = 1$, 序列 $\{z_n^*\}_1^\infty$ 在 H 中收敛于 z^*.

另一方面，既然对所有的 n, $\tilde{I}_b(v_n) \geq M$, 所以

$$\int_Q (\frac{1}{2}Lz_n z_n + \frac{b}{2}|z_n^+|^2 + \frac{a}{2}|z_n^-|^2 - z_n - \varepsilon h(x,t)z_n)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \geq M.$$

两边同除以 $\|v_n\|^2$, 得

$$\begin{aligned}&\int_Q [\frac{1}{2}(-|(z_n^*)_t|^2 + |(z_n^*)_{xx}|^2) + \frac{b}{2}|(z_n^*)^+|^2 + \frac{a}{2}|(z_n^*)^-|^2 - \frac{z_n^*}{\|v_n\|} - \varepsilon h(x,t)\frac{z_n^*}{\|v_n\|})\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{M}{\|v_n\|^2}.\end{aligned} \tag{11}$$

从 $w_n = \theta(v_n)$ 的定义知，对任意的 $y \in W$, $n \geq 1$ 有

$$\int_Q [-(z_n)_t y_t + (z_n)_{xx}y_{xx} + b(z_n)^+ y - a(z_n)^- y - y - \varepsilon h(x,t)y]\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0. \tag{12}$$

在 (12) 式中令 $y = w_n$, 两边除以 $\|v_n\|^2$, 得

$$\int_Q [(-|(w_n^*)_t|^2 + |(w_n^*)_{xx}|^2) + (b(z_n^*)^+ - a(z_n^*)^- - \frac{1}{\|v_n\|} - \varepsilon h(x,t)\frac{1}{\|v_n\|})w_n^*]\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0. \tag{13}$$

任取 $y \in W$, (12) 式两边除以 $\|v_n\|$ 且令 $n \to \infty$, 得

$$\int_Q [-(z^*)_t y_t + (z^*)_{xx}y_{xx} + b(z^*)^+ y - a(z^*)^- y]\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0. \tag{14}$$

对所有的 $y \in W$, (14) 式可写成 $DI_b^*(v^* + w^*)(y) = 0$. 所以，由引理 2.3 知 $w^* = \theta^*(v^*)$, 在 (13) 式中令 $n \to \infty$, 得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\int_Q (-|(w_n^*)_t|^2 + |(w_n^*)_{xx}|^2)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = -\lim_{n\to\infty}\int_Q (b(z_n^*)^+ - a(z_n^*)^-)w_n^*\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= -\int_Q (b(z^*)^+ - a(z^*)^-)w^*\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_Q (-(z^*)_t(w^*)_t + (z^*)_{xx}(w^*)_{xx}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_Q (-|(w^*)_t|^2 + |(w^*)_{xx}|^2)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_Q [-|(z_n^*)_t|^2 + |(z_n^*)_{xx}|^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_Q [-|(z^*)_t|^2 + |(z^*)_{xx}|^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

在 (11) 式中令 $n \to \infty$, 得

$$\tilde{I}_b^*(v^*) = \int_Q [\frac{1}{2}(-|(z^*)_t|^2 + |(z^*)_{xx}|^2) + \frac{b}{2}|(z^*)^+|^2 + \frac{a}{2}|(z^*)^-|^2]\mathrm{d}t\mathrm{d}x \geq 0.$$

既然 $\|v^*\| = 1$, 这与对所有的 $v \neq 0$, $\tilde{I}_b^*(v) < 0$ 相矛盾. 这就证明了当 $\|v\| \to \infty$ 时，$\tilde{I}_b(v) \to -\infty$.

引理 2.8[7] 令 E 是实 Banach 空间, $I \in C^1(E,R)$, 设 I 满足 P.S. 条件, N 是集合 K_c 的一个邻域. $K_c = \{x \in E | I(x) = c, I'(x) = 0\}$, $A_b = \{x \in E : I(x) \le b\}$, 则存在任意小的 $\varepsilon > 0$, 映射 $\eta : [0,1] \times E \to E$ 使得

(i) $\eta(0,x) = x, \forall x \in E$;

(ii) $\eta(t,x) = x, \forall x \in A_{c-2\varepsilon} \bigcup (E \backslash A_{c+2\varepsilon}), \forall t \in [0,1]$;

(iii) $\eta(t,\cdot)(A_{c+2\varepsilon} \backslash N) \subset A_{c-\varepsilon}$.

定理 1.1 的证明 由引理 2.4 知存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 0 在 V 中的一个开邻域 B, 使得对所有的 $\varepsilon, |\varepsilon| < \varepsilon_0$, $v = 0$ 是 $\tilde{I}_b$ 的极小值点. 当 $|||v||| \to \infty$ 时 $\tilde{I}_b(v) \to -\infty$ (引理 2.7), 且 $\tilde{I}_b \in C^1(V,R)$ 满足 P.S. 条件, 所以 $\max_{v\in V} \tilde{I}_b(v)$ 存在, 是 $\tilde{I}_b$ 的临界值. 所以, 存在 $\tilde{I}_b$ 的临界点 v_0, 使得

$$\tilde{I}_b(v_0) = \max_{v \in V} \tilde{I}_b(v).$$

令 C 是 v_0 在 V 中的开邻域, 使得 $B \bigcap C = \emptyset$. 既然, 当 $|||v||| \to \infty$ 时 $\tilde{I}_b(v) \to -\infty$, 则可选择 $v_1 \in V \setminus (B \bigcup C)$ 使得 $\tilde{I}_b(v_1) < \tilde{I}_b(0)$. 令 Γ 为 V 中所有联结 0 与 v_1 的道路的集合. 令

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{\gamma} \tilde{I}_b(v).$$

令 $\Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \bigcap C = \emptyset\}$ 和

$$c' = \inf_{\gamma \in \Gamma'} \sup_{\gamma} \tilde{I}_b(v).$$

我们已知, 当 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ 时有, 0 是 $\tilde{I}_b(v)$ 的极小值点; 当 $|||v||| \to \infty$ 时 $\tilde{I}_b(v) \to -\infty$, $\tilde{I}_b$ 满足 P.S. 条件, 由山路定理 [7] 知

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{\gamma} \tilde{I}_b(v)$$

是 $\tilde{I}_b$ 的临界值.

首先, 我们证明若 $\tilde{I}_b(v_0) = c$, 则存在 $\tilde{I}_b$ 的临界点 v 且 $\tilde{I}_b(v) = c$, $v \neq v_0$ (当然 $v \neq 0$, 因为 $c \neq \tilde{I}_b(0)$).

若 $\tilde{I}_b(v_0) = c$, 则 $c = c'$. 事实上, 因为 $\Gamma' \subset \Gamma$, 所以 $c \le c'$. 另一方面, c 是 $\tilde{I}_b$ 的最大值, 所以 $c' \le c$, 所以 $c = c'$. 假设 $K_c = \{v_0\}$, 在引理 2.8 中, 取 $E = V$, $I = \tilde{I}_b$, $c = c$, $N = C$, 则存在 ε, η, 其中 $\varepsilon < \frac{1}{2}(c - \tilde{I}_b(0))$. 取 $\gamma \in \Gamma'$ 使得 $\sup_\gamma \tilde{I}_b \le c$. 由引理 2.8 知 $\eta(1,\cdot) \circ \gamma \in \Gamma$ 且

$$\sup \tilde{I}_b(\eta(1,\cdot) \circ \gamma) \le c - \varepsilon < c$$

矛盾. 所以, 存在 $\tilde{I}_b$ 的临界点 v 且 $\tilde{I}_b(v) = c$, $v \neq v_0, 0$, 这意味着方程 (1) 在 $3 < a$, $b < 15$ 时至少存在三个解.

最后, 若 $\tilde{I}_b(v_0) \neq c$, 则存在 $\tilde{I}_b$ 的临界点 v, $\tilde{I}_b(v) = c$, 使得 $v \neq v_0$, 0 (因为 $c \neq \tilde{I}_b(v_0)$, $c > \tilde{I}_b(0)$). 此时, 方程 (1) 在 $3 < a$, $b < 15$ 时也至少存在三个解.

参考文献:

[1] CHOI Q H, TACKSUN J, MCKENNA P J. *The study of a nonlinear suspension bridge equation by a variational reduction method* [J]. Appl. Anal., 1993, **50**(1-2): 73–92.

[2] AMANN H. *Saddle points and multiple solutions of differential equations* [J]. Math. Z., 1979, **169**(2): 127–166.

[3] CASTRO A, LAZER A C. *Applications of a max-min principle* [J]. Rev. Colombiana Mat., 1976, **10**(4): 141–149.
[4] LAZER A C, LANDESMAN E M, MEYERS D. *On saddle point problems in the calculus of variations, the Ritz algorithm, and monotone convergence* [J]. J. Math. Anal. Appl., 1975, **52**(3): 594–614.
[5] CHOI Q H, TACKSUN J. *On periodic solutions of the nonlinear suspension bridge equation* [J]. Differential Integral Equations, 1991, **4**(2): 383–396.
[6] MCKENNA P J, WALTER W. *Nonlinear oscillations in a suspension bridge* [J]. Arch. Rational Mech. Anal., 1987, **98**(2): 167–177.
[7] AMBROSETTI A, RABINOWITZ P H. *Dual variational methods in critical point theory and applications* [J]. J. Functional Analysis, 1973, **14**: 349–381.
[8] 陆文瑞. 微分方程中的变分方法 [M]. 北京：科学出版社， 2003.
LU Wen-rui. *Variation Method in Differential Equation* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese)
[9] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 济南：山东科学技术出版社， 2001.
GUO Da-jun. *Non-linear Functional Analysis* [M]. Jinan: Shandong Science & Technology Press, 2001. (in Chinese)
[10] 张恭庆. 临界点理论及应用 [M]. 上海：上海科学技术出版社， 1986.
ZHANG Gong-qing. *Critical Point Theory and Application* [M]. Shanghai: Shanghai Science & Technology Press, 1986. (in Chinese)

Multiplicity Results for a Nonlinear Suspension Bridge Equation

YAN Yan-ju[1], *JIN Zheng-guo*[2]
(1. Department of Mathematics & Physics, Anyang Institute of Technology, Henan 455000, China;
2. Deparment of Mathematics, Dalian University of Technology, Liaoning 116024, China)

Abstract: Let $Lu = u_{tt} + u_{xxxx}$ and H be the complete normed space spanned by the eigenfunctions of L. A nonlinear suspension bridge equation $(3 < a, b < 15)$

$$Lu + bu^+ - au^- = 1 + \varepsilon h(x,t) \quad \text{in} \quad H$$

has at least three solutions. This conclusion is shown by a variational reduction method.

Key words: eigenvalue; critical points; variational reduction method.