

函数系数线性自回归模型的样条估计

武新乾¹, 田 铮^{1,2}, 李小斌¹

(1. 西北工业大学应用数学系, 陕西 西安 710072;

2. 模式识别国家重点实验室, 中科院自动化所, 北京 100080)

(E-mail: wuxinqian1001@163.com)

摘 要: 基于多项式样条全局光滑方法, 建立函数系数线性自回归模型中系数函数的样条估计. 在适当条件下, 证明了系数函数多项式样条估计的相合性, 并给出了它们的收敛速度. 模拟例子验证了理论结果的正确性.

关键词: 函数系数线性自回归模型; 多项式样条估计; 相合性; 收敛速度.

MSC(2000): 62G08; 62M10

中图分类号: O212.7

1 引 言

考虑函数系数线性自回归模型

$$Y_t = \theta_0(Z_t) + \theta_1(Z_t)X_{t1} + \theta_2(Z_t)X_{t2} + \cdots + \theta_p(Z_t)X_{tp} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (1)$$

其中, p 和 n 为正整数, 系数函数 $\theta_j(\cdot)$ ($j = 0, 1, \dots, p$) 为未知实值可测函数, 解释性变量 X_{ti} ($i = 1, \dots, p$) 和门限变量 Z_t 为响应变量 $Y_t \in R$ 的滞后值, ε_t 为独立同分布随机误差, $E\varepsilon_t = 0$, $E\varepsilon_t^2 = \sigma^2 < \infty$, 且 ε_t 与 Y_{t-i} ($i > 0$) 独立.

模型 (1) 为 Xia 和 Li^[1] 所研究的函数系数线性模型, 它是函数系数自回归模型的一般推广. 近年来, 人们发现非参数回归在非线性时间序列分析中有许多重要应用, 参见文献 [2] 和 [3]. 然而, 非参数回归在应用中常会遇到“维数祸根”问题, 为了克服“维数祸根”, 有必要对非参数模型附加一定的结构. Chen 和 Tsay^[4] 将 Hastie 和 Tibshirani^[5] 的变化系数模型引入时间序列分析, 提出了函数系数自回归模型

$$X_t = \theta_1(X_{t-d}^*)X_{t-1} + \theta_2(X_{t-d}^*)X_{t-2} + \cdots + \theta_p(X_{t-d}^*)X_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2)$$

其中, p 为正整数; $X_{t-d}^* = (X_{t-i_1}, \dots, X_{t-i_k})^T$, $i_j > 0$ ($j = 1, \dots, k$) 为正整数, A^T 表示向量或矩阵 A 的转置; 系数函数 $\theta_j(\cdot)$ ($j = 1, \dots, p$) 为未知可测函数; ε_t 同模型 (1). 函数系数建模有许多诱人的特点^[6], 引起了一些学者的浓厚兴趣. Chen 和 Tsay^[4] 基于迭代算法和局部常数拟合估计系数函数, 在几何历经条件下证明了系数函数估计量的均方相合性; Cai, Fan 和 Yao^[7] 以及 Chen 和 Liu^[8] 分别在 α -混合和几何历经条件下研究函数系数模型中系数函数的局部线性估计的渐近性质和假设检验; Huang 和 Shen^[9] 在 α -混合条件下研究函数系数回归模型中系数函数的多项式样条估计的相合性和收敛速度.

收稿日期: 2005-09-21; 接受日期: 2007-01-16

基金项目: 国家自然科学基金 (60375003); 航空基础科学基金 (03I53059).

Xia 和 Li^[1] 不仅考虑了门限变量和解释性变量之间的相互作用对响应变量的影响, 而且突出考虑了门限变量的解释能力, 另外还允许滞后变量具有跳跃性, 使得模型 (1) 比模型 (2) 更具一般性和灵活性. 他们在 α -混合条件下利用局部线性光滑方法证明了模型 (1) 中系数函数估计量的一致相合性和最优收敛速度, 得到了误差方差的估计量及其渐近性质. 到目前为止, 对模型 (1) 的研究除了局部线性光滑方法外, 还未见有其它方法的应用.

核估计已被证明是一种处理非参数统计问题的十分有用的方法^[10], Fan^[11] 进一步证明了局部线性估计量比 Nadaraya-Watson 核估计量具有更好的性质, 也可参见文献 [12] 和 [13]. 然而, 局部多项式方法也具有局限性, 它不能给出所拟合模型的简单的显式表达式, 拟合和预报计算量较大, 特别地, 局部线性方法利用单个光滑参数, 当系数函数具有不同光滑性时, 利用局部线性方法就不适当了. 基于多项式样条全局光滑方法能克服局部多项式估计方法的局限性, 可以给出所拟合模型的简单的显式表达式, 拟合和预报计算量较小, 对不同系数函数的光滑性具有适应性和灵活性^[9]. 本文将文献 [9] 中的多项式样条全局光滑方法推广到模型 (1), 在类似的条件下, 讨论了该模型中系数函数估计的相合性, 给出了它们的收敛速度, 最后通过模拟算例验证了理论结果的正确性.

2 多项式样条估计

本文仅在紧集 $D = [a, b]$ 上考虑系数函数的估计问题. 将该区间予以剖分, 结点序列为

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_M < z_{M+1} = b. \quad (3)$$

设 k 为非负整数, 如果一个函数满足: 在每个区间 $[z_i, z_{i+1})$ ($i = 0, 1, \dots, M-1$) 和 $[z_M, z_{M+1}]$ 为 k 次多项式, 且在 $[a, b]$ 上是 $k-1$ ($k \geq 1$) 阶连续可微, 则称该函数为 k 次多项式样条. 多项式样条空间由多项式的次数和结点序列所确定, 例如, 具有结点序列 (3) 的三次多项式样条空间构成了 $M+4$ 维线性空间, 基函数为 $1, z, z^2, z^3, (z-z_1)_+^3, \dots, (z-z_M)_+^3$, 这里, $(z-z_i)_+ = \max\{0, z-z_i\}$ ($i = 1, \dots, M$). 对样条函数的详细了解, 参见文献 [14].

若 (1) 式中函数 $\theta_j(\cdot)$ ($j = 0, 1, \dots, p$) 是 l_j ($l_j \geq 1$) 阶连续可微的, 则由文献 [14] 知, 存在 $l_j - 1$ 次样条 $\bar{\theta}_j(\cdot)$ 使得 $\sup_{z \in D} |\bar{\theta}_j(z) - \theta_j(z)| \leq ch_j^{l_j}$, 其中 c 为正常数, h_j 为最大相邻结点距离. 这说明可由 $\bar{\theta}_j(\cdot)$ 近似 $\theta_j(\cdot)$, 即存在一组基函数 $B_{js}(\cdot)$ 和常数 β_{js} , $s = 1, \dots, K_j$, 使得

$$\theta_j(z) \approx \bar{\theta}_j(z) = \sum_{s=1}^{K_j} \beta_{js} B_{js}(z). \quad (4)$$

这里, 不同光滑性的系数函数 θ_j 允许取不同的正整数 K_j , 具有一定的适应性和灵活性. 令

$$m(\beta) = \sum_{t=1}^n \left\{ Y_t - \sum_{j=0}^p \left[\sum_{s=1}^{K_j} \beta_{js} B_{js}(Z_t) \right] X_{tj} \right\}^2, \quad (5)$$

其中, $X_{t0} \equiv 1, \beta_j = (\beta_{j1}, \dots, \beta_{jK_j})^T, \beta = (\beta_0^T, \beta_1^T, \dots, \beta_p^T)^T$. 假定关于 β_{js} 最小化 (5) 式的解唯一, 不妨记为 $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0^T, \hat{\beta}_1^T, \dots, \hat{\beta}_p^T)^T$, 其中, $\hat{\beta}_j = (\hat{\beta}_{j1}, \dots, \hat{\beta}_{jK_j})^T$ ($j = 0, 1, \dots, p$), 那么, $\theta_j(z)$ 的估计可定义为

$$\hat{\theta}_j(z) = \sum_{s=1}^{K_j} \hat{\beta}_{js} B_{js}(z), \quad j = 0, 1, \dots, p. \quad (6)$$

事实上, 令 $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$,

$$X = \begin{pmatrix} B_{01}(Z_1) \cdots B_{0K_0}(Z_1) & B_{11}(Z_1)X_{11} \cdots B_{1K_1}(Z_1)X_{11} \cdots B_{p1}(Z_1)X_{1p} \cdots B_{pK_p}(Z_1)X_{1p} \\ B_{01}(Z_2) \cdots B_{0K_0}(Z_2) & B_{11}(Z_2)X_{21} \cdots B_{1K_1}(Z_2)X_{21} \cdots B_{p1}(Z_2)X_{2p} \cdots B_{pK_p}(Z_2)X_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ B_{01}(Z_n) \cdots B_{0K_0}(Z_n) & B_{11}(Z_n)X_{n1} \cdots B_{1K_1}(Z_n)X_{n1} \cdots B_{p1}(Z_n)X_{np} \cdots B_{pK_p}(Z_n)X_{np} \end{pmatrix},$$

则有 $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, 这里假定 $X^T X$ 的逆矩阵 $(X^T X)^{-1}$ 存在.

3 主要结果

对于两个正数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 如果 a_n/b_n 一致有界, 那么记 $a_n \lesssim b_n$; 如果 $a_n \lesssim b_n$ 且 $b_n \lesssim a_n$, 那么记 $a_n \asymp b_n$. 令 $\|g\|_2 = \{\int_D g^2(z)dz\}^{1/2}$, $\|g\|_\infty = \sup_{z \in D} |g(z)|$. 又令 G_j 为紧集 D 上的多项式样条函数空间, $\rho_{n,j} = \inf_{g \in G_j} \|g - \theta_j\|_\infty$, $\rho_n = \max_{j \in \{0,1,\dots,p\}} \rho_{n,j}$.

为了得到本文的主要结果, 需附加如下条件:

条件 1 $K_n \asymp n^r$, $0 < r < 1$, 其中, $K_n = \max_{j \in \{0,1,\dots,p\}} K_j$.

条件 2 Y_t 的边缘密度函数 $f(z)$ 在紧集 D 上恒正且有界, 即存在常数 c_1 和 c_2 使得

$$0 < c_1 \leq \min_{z \in D} f(z) \leq f(z) \leq \max_{z \in D} f(z) \leq c_2 < \infty.$$

条件 3 $E(X_t X_t^T | Z_t = z)$ 的特征根恒正且一致有界, 其中, $X_t = (1, X_{t1}, \dots, X_{tp})^T$.

条件 4 $\{Y_t\}$ 是严平稳过程且为强混合序列, 其 α -混合系数 $\alpha(t)$ 满足 $\alpha(t) \leq Ct^{-\alpha}$, $\alpha > (2+3r)/(2-2r)$, C 为正常数.

条件 5 对充分大的 $m \geq 2$, 有 $E(|Y_t|^m) < \infty$.

条件 6 结点序列具有有限网比, 即相邻结点之间距离之比一致有界.

注 1 条件 1-6 是较为基本的假设^[1,7-9], 条件 4 稍强于文献 [9] 中的条件 (iv).

下面陈述本文的主要结果.

定理 若条件 1-6 成立, 则 $\|\hat{\theta}_j - \theta_j\|_2^2 = O_P(\frac{K_n}{n} + \rho_n^2)$, $j = 0, 1, \dots, p$. 特别地, 如果 $\rho_n = o(1)$, 那么 $\hat{\theta}_j$ 是 θ_j 的相合估计, 即 $\|\hat{\theta}_j - \theta_j\|_2 = o_P(1)$, $j = 0, 1, \dots, p$.

推论 假定条件 1-6 成立. 如果 $\theta_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, p$) 都是 l ($l \geq 1$) 阶连续可微的, 并且 $K_0 = K_1 = \dots = K_p = K_n \asymp n^{1/(2l+1)}$, 那么, $\|\hat{\theta}_j - \theta_j\|_2 = O_P(n^{-l/(2l+1)})$. 特别地, 当 $l = 2$ 时, 有 $\|\hat{\theta}_j - \theta_j\|_2 = O_P(n^{-2/5})$.

注 2 定理的结论类似于文献 [9] 中定理 1, 说明将文献 [9] 中的多项式样条方法推广到模型 (1) 是可行的. 推论的结论是新的, 它推广了文献 [9] 中的结果.

4 定理和推论的证明

由于样条估计 $\hat{\theta}_j$ 由函数空间 G_j 所唯一确定, 不同的基函数可以给出相同的估计, 因而, 为了方便证明, 本节采用基函数 $B_{js} = K_j^{1/2} N_{js}$, $s = 1, \dots, K_j$; $j = 0, 1, \dots, p$, 其中 N_{js} 为文献 [15] 中定义的 B-样条. 另外, 对于 m 维向量 $a = (a_1, \dots, a_m)^T$, 记 $|a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_m^2}$.

引理 1 在条件 6 下, 存在正常数 M_1 和 M_2 , 使得对任何 $j = 0, 1, \dots, p$ 有

$$M_1 |\beta_j|^2 \leq \int \left\{ \sum_{s=1}^{K_j} \beta_{js} B_{js}(z) \right\}^2 dz \leq M_2 |\beta_j|^2.$$

证明 参见文献 [15] 中的定理 5.4.2.

引理 2 令 $X_{t0} \equiv 1$, 在条件 1, 2 及 4-6 情况下, 有

$$\sup_{\theta_j \in G_j, j=0,1,\dots,p} \left| \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [\sum_{j=0}^p \theta_j(Z_t) X_{tj}]^2 \right\} / \left\{ E[\sum_{j=0}^p \theta_j(Z_t) X_{tj}]^2 \right\} - 1 \right| = o_P(1).$$

证明 类似于文献 [9] 中引理 1 的证明, 此处从略.

引理 3 在条件 1-6 情形下, 存在区间 $[M_3, M_4]$, $0 < M_3 < M_4 < \infty$, 使得

$$P\left\{(X^T X)/n \text{ 的所有特征值落入 } [M_3, M_4]\right\} \rightarrow 1, (n \rightarrow \infty).$$

证明 由引理 2, 以概率趋于 1, 有

$$\frac{1}{n} \beta^T X^T X \beta = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \sum_{j=0}^p \theta_j(Z_t, \beta) X_{tj} \right\}^2 \asymp E \left\{ \sum_{j=0}^p \theta_j(Z_t, \beta) X_{tj} \right\}^2.$$

其中, $X_{t0} \equiv 1$, $\theta_j(z, \beta) = \sum_{s=1}^{K_j} \beta_{js} B_{js}(z)$, $j = 0, 1, \dots, p$. 又由条件 2 和 3 以及引理 1 知

$$E \left\{ \sum_{j=0}^p \theta_j(Z_t, \beta) X_{tj} \right\}^2 \asymp \sum_{j=0}^p \|\theta_j(Z_t, \beta)\|_2^2 \asymp |\beta|^2,$$

所以, 除了一个概率趋于 0 的事件以外, $\frac{1}{n} \beta^T X^T X \beta \asymp |\beta|^2$ 对所有的 β 一致地成立. 从而引理 3 得证.

定理的证明 仿文献 [9] 中定理 1 的证明思路证之. 令 $X_{t0} \equiv 1$. 对于所有的 $j = 0, 1, \dots, p$, 记 $\tilde{\theta}_j(z) = \sum_{s=1}^{K_j} \tilde{\beta}_{js} B_{js}(z)$, $\tilde{\beta}_j = (\tilde{\beta}_{j1}, \dots, \tilde{\beta}_{jK_j})^T$. 另外, 记 $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_0^T, \tilde{\beta}_1^T, \dots, \tilde{\beta}_p^T)^T$ 并且令 $\tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \tilde{Y}$, 其中,

$$\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)^T, \quad \tilde{Y}_t = \sum_{j=0}^p \theta_j(Z_t) X_{tj}.$$

注意到 $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, 则有 $\hat{\beta} - \tilde{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}$, 这里 $\mathbb{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$. 易知,

$$\begin{aligned} E(\mathbb{E}^T X X^T \mathbb{E}) &= E \left\{ \sum_{j=0}^p \sum_{s=1}^{K_j} \sum_{t=1}^n B_{js}(Z_t) X_{tj} \varepsilon_t \right\}^2 \\ &= \sum_{j=0}^p \sum_{s=1}^{K_j} \sum_{t=1}^n E \{ B_{js}(Z_t) X_{tj} \varepsilon_t \}^2 \lesssim n \sum_{j=0}^p K_j. \end{aligned}$$

因而, $\mathbb{E}^T X X^T \mathbb{E} = O_P(n \sum_{j=0}^p K_j)$. 从而由引理 3, 以概率趋于 1, 有

$$|\hat{\beta} - \tilde{\beta}|^2 = \mathbb{E}^T X (X^T X)^{-1} (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E} \lesssim \frac{1}{n^2} \mathbb{E}^T X X^T \mathbb{E}.$$

于是, 由 (6) 式和引理 1 可得

$$\sum_{j=0}^p \|\hat{\theta}_j - \tilde{\theta}_j\|_2^2 \asymp |\hat{\beta} - \tilde{\beta}|^2 = O_P\left(\frac{K_n}{n}\right).$$

令 $\theta_j^* \in G_j$, 使得 $\|\theta_j^* - \theta_j\|_\infty = \rho_{n,j}$, 并记 $\theta_j^*(z) = \sum_{s=1}^{K_j} \beta_{js}^* B_{js}(z)$, $\beta_j^* = (\beta_{j1}^*, \dots, \beta_{jK_j}^*)^T$, $j = 0, 1, \dots, p$. 又记 $\beta^* = (\beta_0^{*T}, \beta_1^{*T}, \dots, \beta_p^{*T})^T$. 由引理 1 和引理 3, 以概率趋于 1, 有

$$\sum_{j=0}^p \|\tilde{\theta}_j - \theta_j^*\|_2^2 \asymp |\tilde{\beta} - \beta^*|^2 \asymp \frac{1}{n} (\tilde{\beta} - \beta^*)^T X^T X (\tilde{\beta} - \beta^*)$$

因为 $X\tilde{\beta} = X(X^T X)^{-1} X^T \tilde{Y}$ 为正交投影, 所以,

$$\frac{1}{n} (\tilde{\beta} - \beta^*)^T X^T X (\tilde{\beta} - \beta^*) \leq \frac{1}{n} |\tilde{Y} - X\beta^*|^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \sum_{j=0}^p [\theta_j(Z_t) - \theta_j^*(Z_t)] X_{tj} \right\}^2.$$

又由条件 2 和 3 知, $E\{\sum_{j=0}^p [\theta_j(Z_t) - \theta_j^*(Z_t)] X_{tj}\}^2 \asymp \sum_{j=0}^p \|\theta_j - \theta_j^*\|_2^2$, 进而有

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left\{ \sum_{j=0}^p [\theta_j(Z_t) - \theta_j^*(Z_t)] X_{tj} \right\}^2 = O_P\left(\sum_{j=0}^p \|\theta_j - \theta_j^*\|_2^2\right).$$

注意到 $\|\theta_j^* - \theta_j\|_2 \lesssim \|\theta_j^* - \theta_j\|_\infty$, 因此, $\sum_{j=0}^p \|\tilde{\theta}_j - \theta_j^*\|_2^2 = O_P(\rho_n^2)$. 从而, 由三角不等式知

$$\|\hat{\theta}_j - \theta_j\|_2^2 = O_P(K_n/n + \rho_n^2), \quad j = 0, 1, \dots, p.$$

定理中后一部分结论的证明是显然的.

推论的证明 由于 $\theta_j(z)$ ($j = 0, 1, \dots, p$) 都是 l ($l \geq 1$) 阶连续可微的, 并且 $K_0 = K_1 = \dots = K_p = K_n$, 于是, 由条件 (1) 和 (6) 以及文献 [14] 中第 149 页知, 存在 $l-1$ 次样条函数 $\bar{\theta}_j(\cdot)$ 使得 $\|\bar{\theta}_j - \theta_j\|_\infty \lesssim K_n^{-l}$. 从而, $\rho_{n,j} \lesssim K_n^{-l}$, 进而知 $\rho_n = O(K_n^{-l})$. 因而, 由上述定理和 $K_n \asymp n^{1/(2l+1)}$ 可得 $\|\hat{\theta}_j - \theta_j\|_2 = O_P(n^{-l/(2l+1)})$, $j = 0, 1, \dots, p$. 推论中后一部分结论的证明是显然的.

5 模拟算例

考虑文献 [1] 中的模型

$$Y_t = \theta_0(Y_{t-4}) + \theta_1(Y_{t-4})Y_{t-2} + 0.05\varepsilon_t. \quad (7)$$

其中, $\theta_0(z) = 0.8e^{-4(z-0.5)^2}$, $\theta_1(z) = 0.6 \sin(2\pi(z-0.5))$, ε_t 独立同分布且 $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$.

为了衡量系数函数 $\theta_j(z)$ ($j = 0, 1$) 的估计量, 引入 RASE (the square-Root of Average Squared Error) 为

$$\text{RASE}_j = \left\{ \frac{1}{n_{\text{grid}}} \sum_{l=1}^{n_{\text{grid}}} [\hat{\theta}_j(u_l) - \theta_j(u_l)]^2 \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

其中, $\{u_l, l = 1, \dots, n_{\text{grid}}\}$ 为等距格点集, $u_1 = 0, u_{n_{\text{grid}}} = 1, n_{\text{grid}} = 101$. 在模拟计算中, 由 AIC 准则自动选择结点个数 [9], 即通过最小化 AIC 自动选择结点个数, 这里, $\text{AIC} = \log(\text{RSS}/n) + 2q/n$, 其中, $\text{RSS} = m(\hat{\beta})$ 为最小化 (5) 式的残差平方和, $q = \sum_{j=0}^p K_j$ 为待估参数个数, $p = 1$. 同时, 在区间 $[0, 1]$ 上等距放置结点, 并利用三次样条函数空间的 B -样条基函数构造系数函数 $\theta_0(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 的估计量.

对不同的样本容量 $n = 100, 200$ 和 300 , 产生 501 个样本. 表 1 给出了不同样本容量 n 的条件下, $\theta_0(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 的三次 B - 样条估计的 RASE 的均值和标准差 (括号内为标准差). 由是可见, $\theta_0(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 的估计量的平均 RASE 随着 n 的增加而减小, 这与上述理论结果是吻合的.

表 1 $\theta_0(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 的估计的 RASE 的均值和标准差 (括号内)

n	三次 B - 样条估计		局部线性估计	
	$\theta_0(z)$	$\theta_1(z)$	$\theta_0(z)$	$\theta_1(z)$
100	0.0305 (0.0188)	0.0678 (0.0616)	0.0379 (0.0138)	0.0827 (0.0491)
200	0.0197 (0.0149)	0.0408 (0.0448)	0.0298 (0.0094)	0.0583 (0.0265)
300	0.0151 (0.0083)	0.0298 (0.0155)	0.0244 (0.0078)	0.0455 (0.0171)

利用文献 [1] 的局部线性光滑方法, 表 1 还给出了 $\theta_0(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 的局部线性估计的 RASE 的均值和标准差 (括号内为标准差). 由是可见, 与局部线性光滑方法相比较, 样条估计具有较小的平均 RASE. 为了直观地进行比较, 图 1 和图 2 分别给出了 $n = 300$ 时 $\theta_0(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 的典型估计曲线, 其中, 实线为真实函数曲线, 点线为三次 B - 样条估计函数曲线, 虚线为局部线性估计函数曲线, 点划线为基于局部线性光滑的 90% 置信带 (参见 [1] 中图 1). 由图 1 和图 2 可以看出, 样条估计方法拟合效果优于局部线性光滑方法.

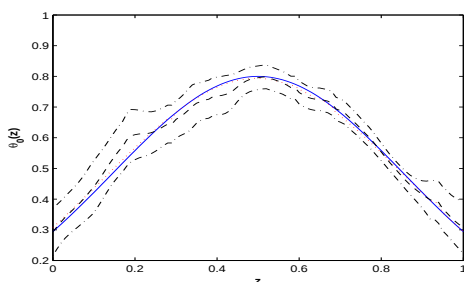


图 1 $\theta_0(z)$ 及其估计曲线

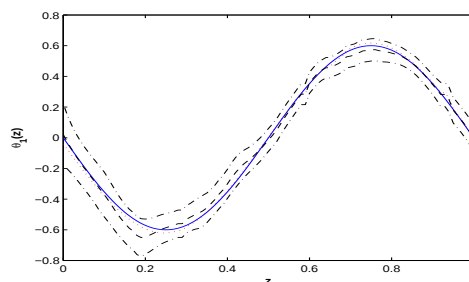


图 2 $\theta_1(z)$ 及其估计曲线

6 结束语

本文将文献 [9] 中非线性时间序列函数系数回归模型的多项式样条估计方法推广到函数系数线性自回归模型, 在适当的条件下, 证明了模型 (1) 中系数函数的样条估计的相合性, 并且讨论了它们的收敛速度. 样条估计方法具有一定的优点: 它能给出所拟合模型的简单的显式表达式, 计算量小, 能适应不同系数函数的光滑性. 模拟例子不仅验证了所述的理论结果, 而且还表明了样条方法优于局部线性方法.

参考文献:

- [1] XIA Ying-cun, LI W K. On the estimation and testing of functional-coefficient linear models [J]. Statist. Sinica, 1999, 9(3): 735-757.

- [2] TONG H. *A personal overview of non-linear time series analysis from a chaos perspective* [J]. Scand. J. Statist., 1995, **22**(4): 399–445.
- [3] HÄRDLE W, LÜTKEPOHL H, CHEN R. *A review of nonparametric time series analysis* [J]. Int. Statist. Rev., 1997, **65**: 49–72.
- [4] CHEN Rong, TSAY R S. *Functional-coefficient autoregressive models* [J]. J. Amer. Statist. Assoc., 1993, **88**(421): 298–308.
- [5] HASTIE T, TIBSHIRANI R. *Varying-coefficient models* [J]. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1993, **55**(4): 757–796.
- [6] CAI Zong-wu. *Nonparametric estimation equations for time series data* [J]. Statist. Probab. Lett., 2003, **62**(4): 379–390.
- [7] CAI Zong-wu, FAN Jian-qing, YAO Qi-wei. *Functional-coefficient regression models for nonlinear time series* [J]. J. Amer. Statist. Assoc., 2000, **95**(451): 941–956.
- [8] CHEN Rong, LIU Lon-mu. *Functional coefficient autoregressive models: estimation and tests of hypotheses* [J]. J. Time Ser. Anal., 2001, **22**(2): 151–173.
- [9] HUANG Jian-hua, SHEN Hai-peng. *Functional coefficient regression models for nonlinear time series: A polynomial spline approach* [J]. Scand. J. Statist., 2004, **31**(4): 515–534.
- [10] FAN J, GIJBELS I. *Local Polynomial Modelling and Its Applications* [M]. London: Chapman and Hall, 1996.
- [11] FAN Jian-qing. *Local linear regression smoothers and their minimax efficiencies* [J]. Ann. Statist., 1993, **21**(1): 196–216.
- [12] MASRY E. *Multivariate regression estimation-local polynomial fitting for time series* [J]. Stochastic Process. Appl., 1996, **65**(1): 81–101.
- [13] MASRY E, FAN Jian-qing. *Local polynomial estimation of regression functions for mixing processes* [J]. Scand. J. Statist., 1997, **24**(2): 165–179.
- [14] DE BOOR C. *A Practical Guide to Splines* [M]. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [15] DEVORE R A, LORENTZ G G. *Constructive Approximation* [M]. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Spline Estimates in Functional-Coefficient Linear Autoregressive Models

WU Xin-qian¹, TIAN Zheng^{1,2}, LI Xiao-bin¹

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Shaanxi 710072, China;

2. National Key Laboratory of Pattern Recognition, & Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: A global smoothing method based on polynomial splines is used to estimate the coefficient functions in functional-coefficient linear autoregressive models. Under some mild conditions, consistency of the polynomial spline estimators is proved. Rates of convergence of these estimators are also given. The main results are verified by a simulation example.

Key words: functional-coefficient linear autoregressive model; polynomial spline estimation; consistency; convergence rate.