第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0876-07 **文献标识码**: **A**

二阶椭圆偏微分方程的 Pinching- 估计

徐金菊
(曲阜师范大学数学系, 山东 曲阜 273165)
(E-mail: jjxu_jane@163.com)

摘 要: Pinching- 估计是研究解的凸性的一种重要方法, 主要给出了半线性二阶椭圆偏微分方程的 Pinching- 估计, 并将其推广到一类完全非线性二阶椭圆偏微分方程.

关键词: 椭圆方程; pinching- 估计; 凸性.
MSC(2000): 35E10
中图分类: O175.25

1 引 言

在偏微分方程中, 解的凸性的研究已有悠久的历史. Pinching- 估计的方法, 最初是由 R.Hamilton[3] 研究三维流行上 Ricci 曲率流得到的. 这个估计说明了 Ricci 张量的特征值能互相控制. 后来, G.Huisken[4] 在处理严格凸曲面上平均曲率流时, 给出了 Pinching 估计, 再后来, Ben Andrews[1] 也给出了一般曲率流的 Pinching- 估计. 这里, 将它推广到二阶椭圆偏微分方程.

$$F(u_{ij}(x)) \equiv f(\lambda[u_{ij}]) = \psi(x, u, Du) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为有界区域, λ 表示二阶导数 u_{ij} 的 Hessian 矩阵的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ψ 为 $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R^n}$ 上给定函数.

$$u = \varphi \quad \text{on} \quad \partial\Omega. \tag{1.2}$$

定义 1 设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, $S_k(\lambda)$ 定义如下:

$$S_k(\lambda) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k},$$

这里求和是对所有 $\{1, \ldots, n\}$ 中递增序列的 $i_1, \ldots, i_k$.

定义 2 设 $1 \le k \le n$, Γ_k 称为 R^n 中的一个锥是指

$$\Gamma_k = \{\lambda \in R^n : S_1(\lambda) > 0, \ldots, S_k(\lambda) > 0\}.$$

定义 3 函数 $u \in C^2(\bar{\Omega})$ 称为容许解, 是指如果在任一点 $x \in \bar{\Omega}$, 都有 $(\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n) \in \Gamma_k$.

对于 $\psi \equiv \psi(x)$, L.Caffarelli 等 [2] 在区域和 f 给定的条件下, 证明了狄里克莱问题 (1.1),(1.2) 古典解的存在性. Neil S. Trudinger[5] 中也有存在性的证明.

收稿日期: 2005-08-31; **接受日期**: 2006-07-02
基金项目: 国家自然科学基金 (10671186).

比如， $f(\lambda[u_{ij}])=S_k(\lambda), k=1$ 时，方程 (1.1) 为 $\Delta u=\psi(x,u,Du)$. 所以，首先考虑如下半线性椭圆方程:

$$\Delta u=\psi(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1.3}$$

其中 Ω 为 $\mathbf{R}^n$ 中有界凸区域， ψ 为 Ω 上给定函数.

定理 1 若 $u\in C^2(\bar{\Omega})\bigcap C^4(\Omega)$ 为方程 (1.3) 的容许解，且在 $\bar{\Omega}$ 中， $u_{ij}>0$. 如果函数 $\psi(x)>0$ 光滑，且 ψ^{-1} 严格凸，则有 Pinching- 估计 $\lambda_{\max}\le C\lambda_{\min}$, 这里， $u_{ij}>0$ 表示 u 的 Hessian 矩阵是正定的， $\lambda_{\max},\lambda_{\min}$ 为 u 的 Hessian 矩阵的最大、最小特征值. C 为常数且依赖于 $u_{ij}|_{\partial\Omega}$, ψ^{-1} 的严凸以及 $\psi(x)$ 的 Hessian 矩阵的最大、最小特征值.

2 定理 1 的证明

设 u^{ij} 为 u_{ij} 的逆矩阵. 如果 $x\in\partial\Omega$, 结论成立. 如果 $x\in\Omega$, 令 $P(x,\xi)=\Delta u u^{ij}\xi_i\xi_j(x)$, 其中 ξ 为 $\mathbf{R}^n$ 中单位向量. 假设 $P(x)$ 在 x_0 点达到极大值. 不妨设 ξ 为单位向量 e_1, 并且选取其他坐标向量为 $e_2,\dots,e_n$, 使得 $(e_1,\dots,e_n)$ 是 x_0 附近的局部正交坐标系，则矩阵 $u_{ij}(x_0)$ 为对角阵. 那么函数 $P(x)=\Delta u u^{11}$ 在 x_0 点达到极大值.

以下的计算过程均在 x_0 点，且重复指标表示从 1 到 n 求和. 我们有

$$P_i=(\Delta u)_i u^{11}+(\Delta u)(u^{11})_i=(\Delta u)_i u^{11}-(\Delta u)u^{1k}u^{1l}u_{kli}. \tag{2.1}$$

因为 $P_i(x_0)=0$,

$$(\Delta u)_i=(\Delta u)u^{11}u_{11i} \tag{2.2}$$

由 (2.2) 式可得,

$$\begin{aligned}
P_{ii}=&(\Delta u)_{ii}u^{11}+(\Delta u)_i(u^{11})_i-(\Delta u)_i u^{1k}u^{1l}u_{kli}-\Delta u(u^{1k}u^{1l}u_{kli})_i,\\
=&(\Delta u)_{ii}u^{11}-2(\Delta u)_i u^{1k}u^{1l}u_{kli}-\Delta u(-u^{1m}u^{kn}u_{mni}u^{1l}u_{kli}-\\
&u^{1k}u^{1m}u^{ln}u_{mni}u_{kli}+u^{1k}u^{1l}u_{klii}),\\
=&(\Delta u)_{ii}u^{11}-2(\Delta u)_i u^{1k}u^{1l}u_{kli}+2\Delta u u^{1m}u^{kn}u_{mni}u^{1l}u_{kli}-\Delta u u^{1k}u^{1l}u_{klii},\\
=&(\Delta u)_{ii}u^{11}-2(\Delta u)_i(u^{11})^2u_{11i}-\Delta u(u^{1l})^2u_{11ii}+2\Delta u(u^{11})^2u^{ll}u_{1li}^2,\\
=&(\Delta u)_{ii}u^{11}-\Delta u(u^{11})^2u_{11ii}-2\Delta u(u^{11})^3u_{11i}^2+2(\Delta u)(u^{11})^2u^{ll}u_{1li}^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

为简单起见，令

$$F(u_{ij})=-\frac{1}{\Delta u}=-\psi^{-1},\quad F^{ij}=\frac{\partial F}{\partial u_{ij}},\quad F^{ij,st}=\frac{\partial^2 F}{\partial u_{ij}\partial u_{st}}.$$

因此，有

$$F^{ij}=\frac{\delta_{ij}}{(\Delta u)^2},\quad F^{ij,st}=-\frac{2\delta_{ij}\delta_{st}}{(\Delta u)^3},$$

$$F^{ij}u_{ijk}=(-\psi^{-1})_k,\quad F^{ij}u_{ijkk}+F^{ij,st}u_{ijk}u_{stk}=(-\psi^{-1})_{kk}.$$

所以，有

$$F^{ii}u_{iikk}=(-\psi^{-1})_{kk}-F^{ij,st}u_{ijk}u_{stk},\quad F^{ii}u_{ii11}=(-\psi^{-1})_{11}-F^{ij,st}u_{ij1}u_{st1}. \tag{2.4}$$

运用公式 (对任意 $i,k\in\{1,2,\ldots,n\}$): $u_{kkii}=u_{iikk}$, 在 x_0 点，结合以上计算和 (2.4) 式，得出

$$
\begin{aligned}
0 \geq & F^{ii}P_{ii} \\
= & F^{ii}(\Delta u)_{ii}u^{11}-\Delta u(u^{11})^2F^{ii}u_{11ii}-2\Delta u(u^{11})^3F^{ii}u_{11i}^2+2(\Delta u)(u^{11})^2u^{ll}F^{ii}u_{1li}^2 \\
= & u^{11}F^{ii}\sum_{k=1}^{n}u_{iikk}-\Delta u(u^{11})^2F^{ii}u_{ii11}-2\Delta u(u^{11})^3F^{ii}u_{11i}^2+2\Delta u(u^{11})^2u^{ll}F^{ii}u_{1li}^2 \\
= & \Delta(-\psi^{-1})u^{11}-\Delta u(u^{11})^2(-\psi^{-1})_{11}-u^{11}F^{ij,st}u_{ijk}u_{stk}+\Delta u(u^{11})^2F^{ij,st}u_{ij1}u_{st1}- \\
& 2\Delta u(u^{11})^3F^{ii}u_{11i}^2+2\Delta u(u^{11})^2u^{ll}F^{ii}u_{1li}^2 \\
= & \Delta(-\psi^{-1})u^{11}-\Delta u(u^{11})^2(-\psi^{-1})_{11}+\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^3}(\Delta u_l)^2-\frac{2(u^{11})^2}{(\Delta u)^2}(\Delta u_1)^2- \\
& \frac{2(u^{11})^3}{\Delta u}u_{11i}^2+\frac{2(u^{11})^2}{\Delta u}u^{ll}u_{1li}^2. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

在 x_0 点，令 $\lambda=\Delta uu^{11}$, 由 (2.2) 式，可得

$$u_{11i}=\frac{1}{\lambda-1}\sum_{k=2}^{n}u_{kki}, \tag{2.6}$$

$$(\Delta u)_i=\frac{\lambda}{\lambda-1}\sum_{k=2}^{n}u_{kki}. \tag{2.7}$$

将 (2.6), (2.7) 代入 (2.5) 式，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^3}\sum_{l}(\Delta u_l)^2 = & \frac{2u^{11}}{(\Delta u)^3}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2\sum_{l}(\sum_{i=2}^{n}u_{iil})^2 \\
-\frac{2(u^{11})^3}{\Delta u}u_{11i}^2 = & -\frac{2(u^{11})^3}{\Delta u}\frac{1}{(\lambda-1)^2}\sum_{l}(\sum_{i=2}^{n}u_{iil})^2 \\
= & -\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^3}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2\sum_{l}(\sum_{i=2}^{n}u_{iil})^2.
\end{aligned}
$$

所以 (2.5) 式可化为

$$0\geq\Delta(-\psi^{-1})-\Delta uu^{11}(-\psi^{-1})_{11}-\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}(\Delta u_1)^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{ll}u_{1li}^2. \tag{2.8}$$

只需证明

$$-\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}(\Delta u_1)^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{ll}u_{1li}^2\geq 0. \tag{2.9}$$

再由 f^{-1} 的严格凸性，即可以得出

$$\Delta uu^{11}(\psi^{-1})_{11}\leq\Delta(\psi^{-1}),\quad \Delta uu^{11}\leq\frac{\Delta(\psi^{-1})}{(\psi^{-1})_{11}},$$

因此，得到 Pinching- 估计

$$\max P=\Delta uu^{11}(x_0)\leq\frac{\Delta(\psi^{-1})}{(\psi^{-1})_{11}}. \tag{2.10}$$

下面证明 (2.9) 式成立. 令

$$Q=-\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}(\Delta u_1)^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{ll}u_{1li}^2.$$

由 (2.7) 式，可以得出

$$Q=-\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2(\sum_{k=2}^n u_{kk1})^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{ll}u_{1li}^2. \tag{2.11}$$

分两种情形证明 $Q\geq 0$.

i). 当 $n=2$ 时，由 (2.11) 式及 $u^{22}=\frac{u^{11}}{\lambda-1}$, 得

$$\begin{aligned}Q=&-\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2u_{221}^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{11}\frac{1}{(\lambda-1)^2}u_{22i}^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{22}u_{122}^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{22}u_{121}^2\\ \geq&-\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2u_{221}^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{11}\frac{1}{(\lambda-1)^2}u_{221}^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}\frac{u^{11}}{\lambda-1}u_{122}^2\\ =&\frac{2u^{11}}{\Delta u}u_{221}^2[-\frac{1}{\Delta u}(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2+\frac{u^{11}}{(\lambda-1)^2}+\frac{u^{11}(\lambda-1)}{(\lambda-1)^2}]\\ =&0.\end{aligned} \tag{2.12}$$

ii). 对于 $n(\geq 3)$ 时：由 $\lambda=\Delta u u^{11}$, 可得 $\frac{\lambda-1}{u^{11}}=\sum_{k=2}^n u_{kk}$, 则有 $l>1$ 时， $u^{ll}>\frac{u^{11}}{\lambda-1}$, 再由 (2.6), (2.7) 式得出

$$\begin{aligned}Q=&-\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}(\Delta u_1)^2+\frac{2u^{11}}{\Delta u}u^{ll}u_{1li}^2=\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}[-(\Delta u_1)^2+\Delta u\sum_{l=1}^n u^{ll}u_{1li}^2]\\ =&\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}[-(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2(\sum_{k=2}^n u_{kk1})^2+\Delta u u^{ll}u_{11i}^2+\Delta u\sum_{l=2}^n u^{ll}u_{1ll}^2+\Delta u\sum_{l=2}^n u^{ll}u_{1l1}^2]\\ \geq&\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}[-(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2(\sum_{k=2}^n u_{kk1})^2+\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}(\sum_{k=2}^n u_{kk1})^2+\\ &\qquad\Delta u\frac{u^{11}}{\lambda-1}\sum_{l=2}^n u_{1ll}^2+\Delta u\frac{u^{11}}{\lambda-1}\sum_{l=2}^n u_{11l}^2]\\ =&\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}[-(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2(\sum_{k=2}^n u_{kk1})^2+\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}(\sum_{k=2}^n u_{kk1})^2+\\ &\qquad\frac{\lambda}{\lambda-1}(n-1)(\sum_{l=2}^n u_{ll1}^2)^2+\frac{\lambda}{\lambda-1}\sum_{l=2}^n u_{11l}^2]\\ =&\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}\frac{\lambda}{\lambda-1}[(-\frac{\lambda}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-1}+n-1)(\sum_{l=2}^n u_{ll1}^2)^2+\sum_{l=2}^n u_{11l}^2]\\ =&\frac{2u^{11}}{(\Delta u)^2}\frac{\lambda}{\lambda-1}[(n-2)(\sum_{l=2}^n u_{ll1}^2)^2+\sum_{l=2}^n u_{11l}^2]\\ >&0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

所以对任意 $n \in \mathbf{N}$, $Q \geq 0$. □

3 完全非线性方程的 Pinching- 估计

首先介绍一些符号，设 $\mathbf{\Psi} \subset \mathbf{R}^n$ 为对称凸区域， $\mathrm{Sym}(n) = \{n \times n$ 实对称矩阵 $\}$, 令

$$\tilde{\mathbf{\Psi}} = \{A \in \mathrm{Sym}(n) : \lambda(A) \in \mathbf{\Psi}\}. \tag{a1}$$

我们还设

$$f \in C^2(\mathbf{\Psi})\text{对称，且 } f_{\lambda_i}(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(\lambda) > 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \forall \lambda \in \mathbf{\Psi}. \tag{a2}$$

则由 $F(A) = f(\lambda(A))$, $F : \tilde{\mathbf{\Psi}} \to \mathbf{R}$. 定义 $\tilde{F}(A) = -F(A^{-1}), A^{-1} \in \tilde{\mathbf{\Psi}}$

$$F \text{ 是凹的} \quad \text{in} \quad \tilde{\mathbf{\Psi}} \tag{a3}$$

和

$$\tilde{F} \text{ 是局部凹的} \quad \text{in} \quad \tilde{\mathbf{\Psi}} \tag{a4}$$

$$F(u_{ij}(x)) = \psi(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{3.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为有界区域.

定理 2 若 $u \in C^4(\Omega)$ 满足方程 (3.1), 在 $\bar{\Omega}$ 中， $u_{ij} > 0$, 并且 F 满足条件 (a1)–(a4), 如果 $\varphi(x)$ 在凸区域 Ω 中是严格凹的，则有 Pinching- 估计

$$\lambda_{\max} \leq C \lambda_{\min},$$

其中 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ 分别表示矩阵 u_{ij} 的最小和最大特征值， C 为常数依赖于 $u_{ij}|_{\partial\Omega}, \psi$ 的严凹.

4 定理 2 的证明

首先我们定义 $\dot{f}^k = \frac{\partial f}{\partial \lambda_k}$, $\ddot{f}^{kl} = \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_k \partial \lambda_l}$, $F^{\alpha\beta} = \frac{\partial F}{\partial A_{\alpha\beta}}$, 和 $F^{\alpha\beta,rs} = \frac{\partial^2 F}{\partial A_{\alpha\beta} \partial A_{rs}}$. 下面的引理在后面证明中是需要的 [6].

引理 1 (a) 若任意对角矩阵 $A \in \tilde{\Psi}$, 并且具有不同的特征值，设 $\ddot{F}(B, B)$ 为在方向 $B \in \mathrm{Sym}(n)$ 的二阶导数，则

$$\ddot{F}(B, B) = \sum_{j,k=1}^{n} \ddot{f}^{jk} B_{jj} B_{kk} + 2 \sum_{j<k} \frac{\dot{f}^j - \dot{f}^k}{\lambda_j - \lambda_k} B_{jk}^2. \tag{4.1}$$

(b) 如果 $\tilde{F}(A) = -F(A^{-1})$ 对于正定矩阵 A 是凹的，那么对任一对称矩阵 X, 有

$$\sum_{j,k,p,q=1}^{n} (F^{kl,pq}(A) + 2F^{jp}(A) A^{kq}) X_{jk} X_{pq} \geq 0. \tag{4.2}$$

实际上，我们要用到引理 1 的以下形式.

推论 1 若 F 满足引理 1(b) 的条件, 并且 $A \in \tilde{\Psi}$, 为半正定的对角阵. 设 $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, 且 $\lambda_i > 0, \forall i \geq n - l + 1$. 则

$$\sum_{j,k=n-l+1}^{n} \ddot{f}^{jk}(A) X_{jj} X_{kk} + 2 \sum_{n-l+1 \leq j < k} \frac{\dot{f}^j - \dot{f}^k}{\lambda_j - \lambda_k} X_{jk}^2 + 2 \sum_{i,k=n-l+1} \frac{\dot{f}^i(A)}{\lambda_k} X_{ik}^2 \geq 0. \tag{4.3}$$

其中 $X = X_{jk}$ 是对称矩阵，且当 $i \le n-l$ 时， $X_{jk} = 0$.

注 若 A 是正定的矩阵， (4.3) 直接由 (4.1), (4.2) 式得到；若 A 是半正定的，则用逼近来证明亦可得到 (4.3) 式.

定理 2 的证明 令 $W = \{u_{ij}\}, W_{ij} = u_{ij}$. 则方程 (3.1) 可写成以下形式：

$$F(W(x)) = \psi(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.4}$$

设 $H = \sum W_{ii}$, W^{ij} 表示 W_{ij} 的逆矩阵， $P(x) = (\sum W_{ii})W^{kl}\xi_k\xi_l(x)$, 其中 ξ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位向量. 设 $P(x)$ 在点 $x_0 \in \Omega$ 取得极大值. 我们可以选取坐标系 $\xi = e_1$, 其他方向的坐标向量为 $e_2, \ldots, e_n$ 使得 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 x_0 点附近的局部正交坐标系，且 $W_{ij}(x_0)$ 是对角阵. 则函数 $P(x) = HW^{11}$ 在 x_0 点取得极大值.

同样地，以下的计算都在 x_0 点，并且重复指标表示从 1 到 n 求和. 我们有

$$P_i = H_iW^{11} - HW^{1k}W^{1l}W_{kli}, \tag{4.5}$$

所以，在 x_0 点，有

$$H_i = HW^{11}W_{11i}, \tag{4.6}$$

由 (4.5) 式，得到

$$\begin{aligned} P_{ii} &= H_{ii}W^{11} - 2H_i(W^{11})^2W_{11i} - H[(W^{11})^2W_{11ii} - 2(W^{11})^2W^{ll}W_{1li}^2] \\ &= H_{ii}W^{11} - 2(W^{11})^3W_{11i}^2 - H(W^{11})^2W_{11ii} + 2H(W^{11})^2W^{ll}W_{1li}^2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

我们进一步引入：

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial W_{ij}}, \quad F^{ij,st} = \frac{\partial^2 F}{\partial W_{ij}\partial W_{st}}.$$

运用方程 (4.4), 得到

$$F^{ij}W_{ijk} = \psi_k, \quad F^{ij}W_{ijkk} + F^{ij,st}W_{ijk}W_{stk} = \psi_{kk}, \tag{4.8}$$

结合公式：

$$W_{kkii} = W_{iikk}, \quad \forall\, i,k \in \{1,2\ldots,n\}.$$

有

$$\begin{aligned} 0 \ge & F^{ii}P_{ii} = F^{ii}H_{ii}W^{11} - H(W^{11})^2F^{ii}W_{11ii} + 2H(W^{11})^2\sum_{l>1}F^{ii}W^{ll}W_{1li}^2 \\ =& F^{ii}W_{iikk}W^{11} - H(W^{11})^2F^{ii}W_{ii11} + 2H(W^{11})^2\sum_{l>1}F^{ii}W^{ll}W_{1li}^2 \\ =& \Delta\varphi W^{11} - H(W^{11})^2\varphi_{11} - W^{11}\sum_k F^{ij,st}W_{ijk}W_{stk} + H(W^{11})^2F^{ij,st}W_{ij1}W_{st1} + \\ & 2H(W^{11})^2\sum_{l>1}F^{ii}W^{ll}W_{1li}^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

断言

$$-W^{11}\sum_k F^{ij,st}W_{ijk}W_{stk} + H(W^{11})^2F^{ij,st}W_{ij1}W_{st1} + 2H(W^{11})^2\sum_{l>1}F^{ii}W^{ll}W_{1li}^2 \ge 0.$$

则由 (4.9) 式以及 φ 的严格凹可以得出

$$H(W^{11})^2\psi_{11} \geq \Delta\psi W^{11}, \quad HW^{11} \leq \frac{\Delta\psi}{\psi_{11}}. \tag{4.10}$$

因此得到 Pinching- 估计

$$\max P = HW^{11}(x_0) \leq \frac{\Delta\psi}{\psi_{11}}. \tag{4.11}$$

下面证明断言：因为 $\lambda_i = W_{ii}$, 则断言只需证明

$$\bar{Q} = F^{ij,st}W_{ij1}W_{st1} + 2\sum_{l>1} F^{ii}W^{ll}W_{1li}^2 - \frac{\lambda_1}{H}F^{ij,st}W_{ijk}W_{stk} \tag{4.12}$$

因为这里 $F, \tilde{F} = -F(A^{-1})$ 满足推论 1 的条件，我们得出

$$\begin{aligned}\bar{Q} = &\sum_{k,l}\ddot{f}^{kl}W_{1kk}W_{1ll} - \frac{\lambda_1}{H}\sum_{j,k,l}\ddot{f}^{kl}W_{jkk}W_{jll} + 2\sum_{k}\sum_{l>1}\frac{\dot{f}^k}{\lambda_l}W_{1kl}^2 + \\ &2\sum_{k<l}\frac{\dot{f}^k - \dot{f}^l}{\lambda_k - \lambda_l}W_{1kl}^2 - \frac{2\lambda_1}{H}\sum_{j}\sum_{k<l}\frac{\dot{f}^k - \dot{f}^l}{\lambda_k - \lambda_l}W_{jkl}^2 \geq 0.\end{aligned}$$

因此，定理 2 证毕. □

参考文献:

[1] ANDREWS B. *Contraction of convex hypersurfaces in Euclidean space* [J]. Calc. Var. Partial Differential Equations, 1994, **2**(2): 151–171.

[2] CAFFARELLI L, NIRENBERG L, SPRUCK J. *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian* [J]. Acta Math., 1985, **155**(3-4): 261–301.

[3] HAMILTON R. *Three-manifolds with positive Ricci curvature* [J]. J. Differential Geom., 1982, **17**(2): 255–306.

[4] HUISKEN G. *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres* [J]. J. Differential Geom., 1984, **20**(1): 237–266.

[5] TRUDINGER N S. *On the Dirichlet problem for Hessian equations* [J]. Acta Math., 1995, **175**(2): 151–164.

[6] URBAS J I E. *An expansion of convex hypersurfaces* [J]. J. Differential Geom., 1991, **33**(1): 91–125.

Pinching-Estimate for Second Order Elliptic Equations

XU Jin-ju

(Department of Mathatics, Qufu Normal University, Shandong 273165, China)

Abstract: Pinching-estimate is an important method for studying the convexity of the solutions. It is known that the Pinching-estimate is important in Geometry, and we apply it into partial differiatial equations. In this paper, we mainly give the Pinching-estimates for some semilinear second order elliptic equations and fully nonlinear elliptic equations .

Key words: Elliptic equations; pinching-estimate; convexity.