第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0889-07 **文献标识码**: A

算子偏序的刻画及性质

庞永锋[1,2], 杜鸿科[1]

(1. 陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西 西安 710062; 2. 西安建筑科技大学数学系, 陕西 西安 710055)
(E-mail: pangyongfeng75@yahoo.com.cn)

摘 要: 本文定义了 Hilbert 空间上两个算子间的四种关系: 星序、左星序、右星序及减序, 使用了算子分块矩阵的方法, 给出了两个算子具有上述四种关系之一时它们几何结构的刻画, 证明了这四种关系是真正的偏序关系, 进一步研究了它们之间的关系和性质.

关键词: 算子分块矩阵; 算子偏序; 特殊算子.
MSC(2000): 46C99; 47A99
中图分类: O177.1

1 引 言

近来关于两个矩阵的星序、左星序、右星序及减序的研究吸引了许多国内外学者的注意. 特别是 Groβ, J.K.Baksalary 和 Jan Hauke 等人取得了很多的成果. 详见文献 [1–4]. 在这些文章中, 他们分别给出了矩阵的四种偏序的刻画、性质及它们之间的关系. 同时还给出了矩阵的偏序和矩阵方幂的偏序之间的关系. 本文将关于矩阵的四种偏序研究推广到 Hilbert 空间上, 并且使用的思想和方法不同于矩阵的情形.

设 $\mathcal{H},\mathcal{K}$ 是 Hilbert 空间, (f,g) 表示 Hilbert 空间中的向量 f 和 g 的内积. 用 $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 表示从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 的有界线性算子的全体. 当 $\mathcal{H}=\mathcal{K}$ 时, 记 $\mathcal{B}(\mathcal{H})\equiv\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$. 设 $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 用 $A^*,R(A),N(A)$ 和 $\overline{R(A)}$ 分别表示算子 A 的共轭、值域、零空间及值域的闭包. 设 $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, 如果 $T=T^*$, 称 T 是自伴的. 对于任何 $x\in\mathcal{H}$, 如果 $(Tx,x)\geq 0$, 称 T 是正算子. 如果 $R(T)=R(T^*)$, 则称 A 是 EP 类算子. 显然自伴算子是 EP 类算子. 相关知识见文献 [6].

设 $K\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 用 $K^+\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 表示算子 K 的 Moore-Penrose 广义逆, 它是满足算子方程 $KK^+K=K, K^+KK^+=K^+, KK^+=(KK^+)^*, (K^+K)^*=K^+K$ 的唯一算子. 众所周知 K^+ 存在当且仅当 $R(K)$ 是闭的.

定义 1.1 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 如果 $A^*A=A^*B$ 且$AA^*=BA^*$, 则称 A 与 B 是星序关系, 记为 $A\overset{*}{\leq}B$.

定义 1.2 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 如果 $A^*A=A^*B$ 且$R(A)\subseteq R(B)$, 则称 A 与 B 是左星序关系, 记为 $A*\leq B$.

定义 1.3 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 如果 $AA^*=BA^*$ 且$R(A^*)\subseteq R(B^*)$, 则称 A 与 B 是右星序关系, 记为 $A\leq *B$.

注意: A 与 B 是右星序关系当且仅当 A^* 与 B^* 是左星序关系.

收稿日期: 2005-12-19; **接受日期**: 2006-12-10
基金项目: 国家自然科学基金 (10571113); 西安建筑科技大学校基础研究基金 (JC0621); 西安建筑科技大学校青年基金 (QN0710).

定义 1.4 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 如果 $R(B)$ 是闭的，$AB^+B=A, BB^+A=A$ 且$AB^+A=A$, 则称 A 与 B 是减序关系，记为 $A\overset{-}{\leq}B$.

引理 1.5 (Douglas 值域包含定理)[5] 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 则 $R(A)\subseteq R(B)$, 当且仅当存在一个算子 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 使得 $A=BX$.

引理 1.6 设算子 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 如果 $R(B)$ 是闭的，则

(1) $BB^+A=A$ 当且仅当 $R(A)\subseteq R(B)$;

(2) $AB^+B=A$ 当且仅当 $R(A^*)\subseteq R(B^*)$.

证明 (1) 如果 $BB^+A=A$, 由引理 1.5, 结论成立.

反之，由于 $R(B)$ 是闭的，则 $\overline{R(A)}\subseteq R(B)$. 因为 BB^+ 是 $R(B)$ 上的正交投影，所以 $BB^+A=A$.

(2) 证明类似于 (1). □

由上述引理可得：

命题 1.7 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 且 $R(B)$ 是闭的，则 $A\overset{-}{\leq}B$ 当且仅当$R(A)\subseteq R(B), R(A^*)\subseteq R(B^*)$ 且$AB^+A=A$.

2 算子间四种关系的刻画

本节将给出 Hilbert 空间上算子间四种关系的几何刻画.

设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 将 $\mathcal{H},\mathcal{K}$ 空间分解为 $\mathcal{H}=\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 和 $\mathcal{K}=\overline{R(A)}\oplus N(A^*)$, 则 A,B 分别有如下的算子分块矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ 和 } B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

由 (2.1) 式可知， A_1 是一个从 $\overline{R(A^*)}$ 到 $\overline{R(A)}$ 的单射稠值域算子. 如果没有特殊说明，下面的算子分块矩阵总是由上述空间分解得到的.

定理 2.1 设算子 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 则 $A\overset{*}{\leq}B$ 当且仅当

$$B=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix},\quad B_{22}\in\mathcal{B}(N(A),N(A^*)).$$

证明 *必要性*. 由 $A\overset{*}{\leq}B$, 则 $A^*(B-A)=0$ 且 $(B-A)A^*=0$, 因此 $R(B-A)\subseteq N(A^*)$ 且 $R(A^*)\subseteq N(B-A)$, 进而 $R(A)\subseteq N((B-A)^*)$. 由 (2.1) 式可得 $B-A=\begin{pmatrix} B_{11}-A_1 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$. 由 $R(A^*)\subseteq N(B-A)$, 对于任何 $x_1\in R(A^*)$ 可得 $(B-A)\begin{pmatrix} x_1\\ 0\end{pmatrix}=0$, 即 $\begin{pmatrix} B_{11}-A_1 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ 0\end{pmatrix}=0$. 计算可得 $\begin{cases}(B_{11}-A_1)x_1=0,\\ B_{21}x_1=0.\end{cases}$ 因此可得 $\begin{cases}B_{11}-A_1=0,\\ B_{21}=0.\end{cases}$ 类似可得 $B_{12}=0$. 故

$$B=A+\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix},\quad B_{22}\in\mathcal{B}(N(A),N(A^*)).$$

充分性. 由 $B=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}, A^*=\begin{pmatrix} {A_1}^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 计算可得 $A^*A=A^*B, AA^*=BA^*$. 由定义 1.1, 则 $A\overset{*}{\leq}B$. □

定理 2.2 设算子 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 则 $A*\le B$ 当且仅当

$$B=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ B_{22}D & B_{22}\end{pmatrix},$$

其中算子 $B_{22}\in\mathcal{B}(N(A),N(A^*))$, 算子 $D\in\mathcal{B}(\overline{R(A^*)},N(A))$.

证明 必要性. 由 $A*\le B$, 则 $A^*A=A^*B$ 且 $R(A)\subseteq R(B)$. 由 $A^*A=A^*B$ 得

$$\begin{pmatrix} {A_1}^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {A_1}^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

计算并比较 (2.2) 式两边可得 $\begin{cases} {A_1}^*(A_1-B_{11})=0,\\ {A_1}^*B_{12}=0.\end{cases}$ 由于 ${A_1}^*$ 是一个单射稠值域算子，因此 $\begin{cases} B_{11}=A_1,\\ B_{12}=0,\end{cases}$ 故 $B=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$. 由 $R(A)\subseteq R(B)$, 则对于任何 $x\in\overline{R(A^*)}$ 存在向量 $y\oplus z$, 其中 $y\in\overline{R(A^*)}, z\in N(A)$ 使得

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ z\end{pmatrix},$$

因此 $\begin{cases} A_1x=A_1y,\\ B_{21}y+B_{22}z=0.\end{cases}$ 由于 A_1 是一个单射稠值域算子，则 $x=y$, 故 $B_{21}x=B_{22}(-z)$, 因此 $R(B_{21})\subseteq R(B_{22})$. 由引理 1.5, 存在算子 $D\in\mathcal{B}(\overline{R(A^*)},N(A))$ 使得 $B_{21}=B_{22}D$. 故 $B=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ B_{22}D & B_{22}\end{pmatrix}$.

充分性. 由 $B=\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ B_{22}D & B_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $B_{22}\in\mathcal{B}(N(A),N(A^*)), D\in\mathcal{B}(\overline{R(A^*)},N(A))$, 经计算可得 $A^*A=A^*B$. 设 $E=\begin{pmatrix} I & 0\\ -D & 0\end{pmatrix}$, 则 $A=BE$. 由引理 1.5 得 $R(A)\subseteq R(B)$. 由定义 1.2, 则 $A*\le B$. □

类似可得下面的命题.

命题 2.3 设算子 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 则 $A\le *B$ 当且仅当

$$B=\begin{pmatrix} A_1 & TB_{22}\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $B_{22}\in\mathcal{B}(N(A),N(A^*)), T\in\mathcal{B}(N(A^*),\overline{R(A)})$.

定理 2.4 设算子 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 且 $R(B)$ 是闭的，则 $A\overset{-}{\le} B$ 当且仅当

$$B=\begin{pmatrix} A_1+RB_{22}S & RB_{22}\\ B_{22}S & B_{22}\end{pmatrix},$$

其中算子 $R\in\mathcal{B}(N(A^*),\overline{R(A)})$ 及 $S\in\mathcal{B}(\overline{R(A^*)},N(A)), B_{22}\in\mathcal{B}(N(A),N(A^*))$ 且 $R(B_{22})$ 和 $R(A)$ 是闭的.

证明 必要性. 由于 $R(B)$ 是闭的，故 B^+ 存在. 不妨设 $B^+=\begin{pmatrix} \widetilde{B_{11}} & \widetilde{B_{12}}\\ \widetilde{B_{21}} & \widetilde{B_{22}}\end{pmatrix}$. 由 $A\overset{-}{\le} B$, 可得 $AB^+B=A, BB^+A=A$ 及 $AB^+A=A$. 经计算可得

$$\begin{cases} B_{11}=A_1+A_1(-\widetilde{B_{12}})B_{22}(-\widetilde{B_{21}})A_1,\\ B_{12}=A_1(-\widetilde{B_{12}})B_{22},\\ B_{21}=B_{22}(-\widetilde{B_{21}})A_1.\end{cases}$$

令 $R=A_1(-\widetilde{B_{12}}), S=(-\widetilde{B_{21}})A_1$, 则 $B=\begin{pmatrix} A_1+RB_{22}S & RB_{22} \\ B_{22}S & B_{22}\end{pmatrix}$.

设 $P=\begin{pmatrix} I & -R \\ 0 & I\end{pmatrix}$ 是从 $\overline{R(A)}\oplus N(A^*)$ 到 $\overline{R(A)}\oplus N(A^*)$ 的算子. $Q=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S & I\end{pmatrix}$ 是从 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 到 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 的算子，则 P,Q 可逆且

$$PBQ=\begin{pmatrix} I & -R \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1+RB_{22}S & RB_{22} \\ B_{22}S & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}=C. \tag{2.3}$$

因为 P,Q 是可逆的，所以 $R(B)$ 是闭的当且仅当 $R(C)$ 是闭的. 因此 $R(A_1)$ 和 $R(B_{22})$ 是闭的，即 $R(A)$ 和 $R(B_{22})$ 是闭的.

充分性. 由于 $B=\begin{pmatrix} A_1+RB_{22}S & RB_{22} \\ B_{22}S & B_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $R\in\mathcal{B}(N(A^*),\overline{R(A)})$ 及 $S\in\mathcal{B}(\overline{R(A^*)},N(A))$, 算子 $B_{22}\in\mathcal{B}(N(A),N(A^*))$ 且 $R(B_{22})$ 和 $R(A)$ 是闭的, 设 $D=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S & 0\end{pmatrix}$ 是从 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 到 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 的算子，经计算可得 $BD=A$. 由引理 1.5, $R(A)\subseteq R(B)$.

设 $T=\begin{pmatrix} I & -R \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是从 $\overline{R(A)}\oplus N(A^*)$ 到 $\overline{R(A)}\oplus N(A^*)$ 的算子，经计算可得 $TA=A$ 和 $TB=A$, 进一步可得 $A^*=B^*T^*$. 由引理 1.5, $R(A^*)\subseteq R(B^*)$.

设 $C=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}$, 由于 $R(B_{22})$ 和 $R(A)$ 是闭的，因此 $R(C)$ 是闭的. 由 (2.3) 式可得 $B=P^{-1}CQ^{-1}$, 故 $R(B)$ 是闭的, 所以 B^+ 存在且 $BB^+B=B$, 因此 $AB^+A=(TB)B^+(BD)=T(BB^+B)D=T(BD)=TA=A$. 由命题 1.7, $A\overset{-}{\le} B$. □

当算子 A 和 B 是自伴算子，则有下面的命题.

命题 2.5 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，则 $A\overset{*}{\le} B$ 当且仅当 $A=BP$, 其中 P 是投影.

证明 *必要性*. 如果 $A\overset{*}{\le} B$, 由定理 2.1, $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 且$B=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}$. 设 $P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 是从 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 到 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 的算子，则 P 是投影且 $BP=A$.

充分性. 设 P 是投影使得 $A=BP$, 则 $BP=PB$. 故 $P\mathcal{H}$ 是 B 的约化子空间. 设 $\mathcal{H}=P\mathcal{H}\oplus P^\perp\mathcal{H}$, 则 $B=\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}$, 且$A=BP=\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, 则 $R(A)=R(B_{11})=P\mathcal{H}, N(A)=N(B_{11})=P^\perp\mathcal{H}$. 由定理 2.1, $A\overset{*}{\le} B$. □

命题 2.6 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是自伴算子，如果 $R(B)$ 是闭的，则 $A\overset{-}{\le} B$ 当且仅当 $A=BK$, 其中 K 是幂等算子.

证明 *必要性*. 当 $A\overset{-}{\le} B$ 时, 由定理 2.4 可得 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 且$B=\begin{pmatrix} A_1+RB_{22}S & RB_{22} \\ B_{22}S & B_{22}\end{pmatrix}$. 设 $K=\begin{pmatrix} I & 0 \\ -S & 0\end{pmatrix}$ 是从 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 到 $\overline{R(A^*)}\oplus N(A)$ 的算子，显然 $K=K^2$ 且 $BK=A$.

充分性. 因为 $A=BK$, 由引理 1.5, 则 $R(A)\subseteq R(B)$. 由 $R(B)$ 是闭的，则 B^+ 存在. 由于 $A=(BK)^*=K^*B$ 且 $AK=BK^2=BK=A$, 则 $AB^+A=K^*(BB^+B)K=(K^*B)K=A$. 由命题 1.7, 故 $A\overset{-}{\le} B$. □

3 算子的四种关系是 $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 上的偏序关系

定理 3.1 $A\overset{*}{\le} B$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 上的一个偏序关系.

证明 (1) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 显然 $A \overset{*}{\leq} A$.

(2) 设 $A \overset{*}{\leq} B, B \overset{*}{\leq} C$. 当 $A \overset{*}{\leq} B$, 由定理 2.1 可得 $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$. 设 $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$. 当 $B \overset{*}{\leq} C$, 由定义 1.1, $B^*B = B^*C$ 且$BB^* = CB^*$. 即

$$\begin{pmatrix} {A_1}^* & 0 \\ 0 & {B_{22}}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {A_1}^* & 0 \\ 0 & {B_{22}}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {A_1}^* & 0 \\ 0 & {B_{22}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {A_1}^* & 0 \\ 0 & B_{22}^* \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

比较 (3.1), (3.2) 式两边可得 $\begin{cases} C_{11} = A_1, \\ C_{12} = 0, \\ C_{21} = 0, \end{cases}$ 则 $C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}$. 由定理 2.1 可得 $A \overset{*}{\leq} C$.

(3) 设 $A \overset{*}{\leq} B$ 且 $B \overset{*}{\leq} A$. 当 $A \overset{*}{\leq} B$, 由定理 2.1, $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$. 当 $B \overset{*}{\leq} A$, 得 $B^*B = B^*A$ 且 $BB^* = AB^*$. 经计算可得 ${B_{22}}^*B_{22} = 0$, 所以 $B_{22} = 0$, 因此 $A = B$.

因此 $A \overset{*}{\leq} B$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 上的一个偏序关系. □

定理 3.2 $A* \leq B$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 上的一个偏序关系.

证明 (1) $\forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 显然 $A* \leq A$.

(2) 设 $A* \leq B, B* \leq C$. 当 $A* \leq B$, 由定理 2.2 可得 $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_{22}D & B_{22} \end{pmatrix}$. 设 $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$. 当 $B* \leq C$, 由定义 1.2 有 $B^*B = B^*C$. 经计算可得

$${A_1}^*A_1 + D^*{B_{22}}^*B_{22}D = {A_1}^*C_{11} + D^*{B_{22}}^*C_{21}, \tag{3.3}$$

$${B_{22}}^*B_{22}D = {B_{22}}^*C_{21}, \tag{3.4}$$

$$D^*{B_{22}}^*B_{22} = {A_1}^*C_{12} + D^*{B_{22}}^*C_{22}, \tag{3.5}$$

$${B_{22}}^*B_{22} = {B_{22}}^*C_{22}. \tag{3.6}$$

分别将 (3.4) 代入 (3.3) 式，(3.6) 代入 (3.5) 式得 $C_{11} = A_1$ 且 $C_{12} = 0$. 又 $R(B) \subseteq R(C)$, 由引理 1.5, 存在算子 X 使得 $B = CX$. 设 $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, 经计算可得 $\begin{cases} B_{22} = C_{22}X_{22}, \\ B_{22}D = C_{21} + C_{22}X_{21}, \end{cases}$ 则 $C_{21} = C_{22}(X_{22}D - X_{21})$, 因此 $C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ C_{22}(X_{22}D - X_{21}) & C_{22} \end{pmatrix}$, 所以 $A* \leq C$.

(3) 设 $A* \leq B$ 且 $B* \leq A$. 当 $A* \leq B$, 由定理 1.2, $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_{22}D & B_{22} \end{pmatrix}$. 当 $B* \leq A$, 由定义 1.2, $B^*B = B^*A$, 经计算可得 ${B_{22}}^*B_{22} = 0$, 则 $B_{22} = 0$, 因此 $B = A$. 所以 $A* \leq B$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 上的一个偏序关系. □

命题 3.3 $A \leq *B$ 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 上的一个偏序关系.

用 $\mathcal{B}_C(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 表示从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 的值域闭的有界线性算子的全体.

定理 3.4 $A \overset{-}{\leq} B$ 是 $\mathcal{B}_C(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 上的一个偏序关系.

证明 (1) $\forall A \in \mathcal{B}_C(\mathcal{H},\mathcal{K})$, 显然 $A \overset{-}{\leq} A$.

(2) 设 $A \overset{-}{\leq} B, B \overset{-}{\leq} C$. 当 $A \overset{-}{\leq} B$, 由命题 1.7, $R(A) \subseteq R(B), R(A^*) \subseteq R(B^*), AB^+A = A$. 当 $B \overset{-}{\leq} C$, 同理可得 $R(B) \subseteq R(C), R(B^*) \subseteq R(C^*), BC^+B = B$. 因此 $R(A) \subseteq R(C), R(A^*) \subseteq R(C^*)$.

将 $B^+ = B^+BB^+$ 代入 $AB^+A = A$ 得 $AB^+BB^+A = A$. 将 $B = BC^+B$ 代入得 $(AB^+B)C^+(BB^+A) = A$. 将 $AB^+B = A, BB^+A = A$ 代入得 $AC^+A = A$, 因此 $A \overset{-}{\leq} C$.

(3) 设 $A \overset{-}{\leq} B, B \overset{-}{\leq} A$. 当 $A \overset{-}{\leq} B$, 由定理 2.4, $B = \begin{pmatrix} A_1 + RB_{22}S & RB_{22} \\ B_{22}S & B_{22} \end{pmatrix}$. 当 $B \overset{-}{\leq} A$, 则 $R(A)$ 是闭的且 $BA^+B = B$, 故 $A^+ = \begin{pmatrix} {A_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 经计算可得 $\begin{cases} B_{22} = B_{22}S{A_1}^{-1}RB_{22}, \\ B_{22}S{A_1}^{-1}RB_{22}S = 0. \end{cases}$ 则 $B_{22}S = (B_{22}S{A_1}^{-1}RB_{22})S = B_{22}S{A_1}^{-1}RB_{22}S = 0$, 所以 $B_{22} = (B_{22}S){A_1}^{-1}RB_{22} = 0$, 故 $A = B$.

因此 $A \overset{-}{\leq} B$ 是 $\mathcal{B}_C(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ 上的一个偏序关系. □

4 四种算子偏序之间的关系

本节将讨论算子偏序之间的关系. 利用前面的结果可得下面的命题.

命题 4.1 设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 如果 $A \overset{*}{\leq} B$, 则 $A* \leq B, A \leq *B$. 特别地当 $R(B)$ 是闭的, 则 $A \overset{-}{\leq} B$.

定理 4.2 设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, 如果 $A* \leq B$ 及 $AB^* = BA^*$, 则 $A \overset{*}{\leq} B$.

证明 设 $A^* \leq B$, 由定理 2.2 可得, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_{22}D & B_{22} \end{pmatrix}$.

由 $AB^* = BA^*$, 可得 $A_1D^*{B_{22}}^* = 0$. 由于 A_1 是一个单射稠值域的算子, 则 $B_{22}D = 0$. 因此 $B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$, 由定理 2.1 可得 $A \overset{*}{\leq} B$. □

由定理 4.2 可得下面的命题.

命题 4.3 设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是自伴算子且 $AB = BA$, 则 $A* \leq B$ 当且仅当 $A \overset{*}{\leq} B; A \leq *B$ 当且仅当 $A \overset{*}{\leq} B$.

定理 4.4 设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 EP 类算子且 $R(B)$ 是闭的, 则 $A \overset{*}{\leq} B$ 当且仅当$A \overset{-}{\leq} B$ 且$AB = BA$.

证明 *充分性*. 由定理 2.4 可得 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且$B = \begin{pmatrix} A_1 + RB_{22}S & RB_{22} \\ B_{22}S & B_{22} \end{pmatrix}$. 由于 $AB = BA$, 经计算可得 $B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$. 故由定理 2.1, 可得 $A \overset{*}{\leq} B$.

由命题 4.1, 必要性是显然的. □

定理 4.5 设 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是正算子, 则 $A \overset{*}{\leq} B$当且仅当$A^m \overset{*}{\leq} B^m$, 其中 $m \in N$ 且 $m \geq 2$.

证明 *必要性*. 由定理 2.1 可得 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$. 因此

$$A^m = \begin{pmatrix} {A_1}^m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 且 \quad B^m = \begin{pmatrix} {A_1}^m & 0 \\ 0 & {B_{22}}^m \end{pmatrix}.$$

由定理 2.1 则 $A^m \overset{*}{\leq} B^m$.

充分性. 当 $A^m \overset{*}{\leq} B^m$ 时, 由定理 2.1 可得, $A^m = \begin{pmatrix} \widetilde{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且$B^m = \begin{pmatrix} \widetilde{A_1} & 0 \\ 0 & \widetilde{B_{22}} \end{pmatrix}$. 由于正算子正的 m 次方根是唯一的, 因此 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $A_1^m = \widetilde{A_1}, B_{22}^m = \widetilde{B_{22}}$. 由定理 2.1 可得 $A \overset{*}{\leq} B$. □

命题 4.6 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是正算子且 $AB=BA$, 则 $A*\leq B$ 当且仅当$A^m*\leq B^m$; $A\leq *B$ 当且仅当 $A^m\overset{*}{\leq} B^m$, 其中 $m\in N$ 且 $m\geq 2$.

证明 *必要性*. 由于 $AB=BA$ 及命题 4.3 有 $A\overset{*}{\leq} B$. 由定理 4.5 可得 $A^m\overset{*}{\leq} B^m$, 进而由命题 4.1 可得 $A^m*\leq B^m$.

充分性. 由定理 2.2 可得 $A^m=\begin{pmatrix}\widetilde{A_1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 且$B^m=\begin{pmatrix}\widetilde{A_1} & 0\\ \widetilde{B_{22}}D & \widetilde{B_{22}}\end{pmatrix}$. 由于 B^m 是正算子，因此 $\widetilde{B_{22}}D=0$ 且 $\widetilde{B_{22}}$ 是正算子. 进一步可得 $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 且$B=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}$, 其中 $A_1^m=\widetilde{A_1}, B_{22}^m=\widetilde{B_{22}}$. 由定理 2.2, 有 $A*\leq B$.

类似地 $A\leq *B$ 当且仅当 $A^m\overset{*}{\leq} B^m$, 其中 $m\in N$ 且 $m\geq 2$. □

定理 4.7 设 $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是正算子且 $AB=BA$, 如果 $R(B)$ 是闭的，则 $A\overset{-}{\leq} B$ 当且仅当 $A^m\overset{-}{\leq} B^m$, 其中 $m\in N$ 且 $m\geq 2$.

证明 *必要性*. 由于 $AB=BA$ 且 $A\overset{-}{\leq} B$, 则由定理 4.4, 可得 $A\overset{*}{\leq} B$. 再由定理 4.2, 有 $A^m\overset{*}{\leq} B^m$. 又由命题 4.1, 可得结论成立.

充分性. 由于 $AB=BA$, 则 $\overline{R(A)}$ 是 B 的约化子空间，因此 $B=\begin{pmatrix}B_{11} & 0\\ 0 & B_{22}\end{pmatrix}$. 故 $A^m=\begin{pmatrix}{A_1}^m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 且$B^m=\begin{pmatrix}{B_{11}}^m & 0\\ 0 & {B_{22}}^m\end{pmatrix}$. 由于 $A^m\overset{-}{\leq} B^m$, 则 ${B_{11}}^m={A_1}^m$. 因为 A 和 B 是正算子，则 A_1,B_{11},B_{22} 是正算子. 进一步可得 $B_{11}=A_1$. 由定理 2.1 可得 $A\overset{*}{\leq} B$. 由命题 4.1, 则 $A\overset{-}{\leq} B$. □

参考文献：

[1] BAKSALARY J K. *Characterizations of minus and star orders between the squares of Hermitian matrices* [J]. Linear Algebra Appl., 2004, **388**: 53–59.

[2] BAKSALARY J K. *Relationships between partial orders of matrices and their powers* [J]. Linear Algebra Appl., 2004, **379**: 277–287.

[3] BAKSALARY J K. *Further properties of the star, left-star,right-star and minus partial orderings* [J]. Linear Algebra Appl., 2003, **375**: 83–94.

[4] BAKSALARY J K. *Further relationships between certain partial orders of matrices and their squares* [J]. Linear Algebra Appl., 2003, **375**: 171–180.

[5] HALMOS P R. *A Hilbert space problem book* [J]. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[6] CONWAY J B. *A Course in Functional Analysis* [M]. Springer-Verlag, New York, 1990.

Characters and Properties of Partial Orders of Operators

PANG Yong-feng[1,2], *DU Hong-ke*[1]

(1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Shaanxi 710062, China;
2. Department of Mathematics, Xi'an University of Architecture and Technology, Shaanxi 710055, China)

Abstract: We define four types of relations of two operators on Hilbert space: star, left-star, right-star and minus orders, respectively. Using the method of operator block matrices, we give the geometric characterizations of these orders. We prove that these orders are realy partial orders. Furthermore, we give relationships among these operator partial orders and their properties.

Key words: operator block matrice; operator partial order; special operator