第27卷第4期 数学研究与评论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

**文章编号**: 1000-341X(2007)04-0896-05 **文献标识码**: A

# 一类反应扩散方程的精确解

徐淑奖 [1,2], 郭玉翠 [2], 李华英 [2]
(1. 山东省计算中心, 山东 济南 250014; 2. 北京邮电大学理学院, 北京 100876)
(E-mail: xushj@keylab.net)

**摘 要**: 运用首次积分法并借助计算机符号计算系统 Mathematica 得到了一类非线性反应扩散方程 $u_t-u_{xx}+\alpha u+\beta u^2+\gamma u^3=0$ 的精确解, 其中既包括已知的类孤立波解, 又有新的精确解.

**关键词**: 反应扩散方程; 首次积分法; 精确解.
**MSC(2000)**: 83C15; 74H05
**中图分类**: O175.29

## 1 引 言

随着科学技术的飞速发展, 非线性科学在各领域内得到了广泛的应用, 由于非线性问题常常用非线性偏微分方程来描述, 因而求解非线性偏微分方程成为了一个备受关注的研究课题. 近年来先后提出了一系列求解非线性偏微分方程精确解的方法, 如齐次平衡法 [1] 、双曲函数展开法 [2] 、椭圆函数展开法 [3] 、辅助函数展开法 [4]. 最近, 基于除法定理冯兆生 [5-7] 提出了首次积分法, 并用它求解了 Burgers-KdV 方程 [5], Sine-Gordon 方程 [6] 和二维 Burgers-KdV 方程[7].

本文考虑一类非线性反应扩散方程

$$u_t-u_{xx}+\alpha\,u+\beta\,u^2+\gamma\,u^3=0, \tag{1}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 是常数. 方程 (1) 又称为广义 Kolmogoroff-Petrovsky-Piscoimov 方程 [8], 是一类重要的数学物理方程, 它涵盖 Fisher 方程、Huxley 方程、Burgers-Huxley 方程、Chaffee-Infanfe 方程、Fitzhugh-Nagumo 方程等 [8]. 范恩贵等 [9] 用齐次平衡法得到了方程 (1) 的扭结波解, 王霞等 [10] 用双曲函数展开法得到了其类孤立波解, 周钰谦等 [11,12] 用基于 Riccati 方程的辅助函数展开法又得到了一些新的精确解.

本文将用首次积分法求解方程 (1), 并得到该方程已知的类孤立波解和新的精确解.

## 2 首次积分法简述

给定非线性偏微分方程, 这里以 $(1+1)$ 维方程为例

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},\ldots)=0. \tag{2}$$

1). 运用行波变换 $u=u(\xi),\xi=x-c\,t$ 将给定的偏微分方程 (2) 化为二阶常微分方程

$$P(u,u',u'')=0. \tag{3}$$

**收稿日期**: 2005-06-27; **接受日期**: 2006-11-05
**基金项目**: 山东省自然科学基金 (Y2006A27).

2). 令 $x=u$, $y=u'$, 将常微分方程 (3) 化为一阶常微分方程组

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = f(x,y). \end{cases}$$

3). 设首次积分为 $p(x,y)=\sum_{i=0}^{m} a_i(x)\,y^i=0$ (通常取 $m=2$), 其中 $a_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ 是实数域上的待定多项式. 根据除法定理，存在实数域上的多项式 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\xi}=[\alpha(x)+\beta(x)y]p(x,y). \tag{4}$$

由 (4) 式确定多项式 $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $a_i(x)$ $(i=0,1,\ldots,m)$, 进而求出 $p(x,y)$.

4). 将 $x=u$, $y=u'$ 代入方程 $\sum_{i=0}^{m} a_i(x)\,y^i=0$, 并解之即可得到方程 (2) 的精确解.

## 3 反应扩散方程的首次积分解法

考虑非线性反应扩散方程 (1) 的行波解 $u=u(\xi)$, $\xi=x-ct$, 其中 $c$ 是待定常数，表示波速. 从而方程 (1) 可以化为

$$u_{\xi\xi}=-c\,u_\xi+\alpha\,u+\beta\,u^2+\gamma\,u^3\,. \tag{5}$$

令 $x=u$, $y=u'$, 将常微分方程 (5) 化为等价的一阶常微分方程组

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -cy+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3. \end{cases} \tag{6}$$

下面我们根据 (6) 式和除法定理，确定方程 (1) 的首次积分. 设方程 (1) 的首次积分为

$$p(x,y)=\sum_{i=0}^{2} a_i(x)\,y^i=0, \tag{7}$$

其中 $a_i(x)$ $(i=0,1,2)$ 是实数域上的待定多项式. 将 (6) 和 (7) 式代入 (4) 式，并按 $y$ 的幂次整理可得

$$\begin{aligned}&[a_2'(x)-\beta(x)a_2(x)]y^3+\{a_1'(x)-[\alpha(x)+2c]a_2(x)-\beta(x)a_1(x)\}y^2+\\&\{a_0'(x)-[\alpha(x)+c]a_1(x)+2[\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3]a_2(x)-\beta(x)a_0(x)\}+\\&[\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3]a_1(x)-\alpha(x)a_0(x)=0.\end{aligned} \tag{8}$$

要使 (8) 式成立，则要求 $y$ 各次幂的系数均为零. 由于 $\beta(x)$, $a_2(x)$ 为多项式，根据

$$a_2'(x)-\beta(x)a_2(x)=0, \tag{9}$$

可得 $\beta(x)=0$, $a_2(x)$ 为常数. 不失一般性，取 $a_2(x)=1$. 将 $\beta(x)=0$, $a_2(x)=1$ 代入 (8) 式，由 $y^2$, $y^1$, $y^0$ 的系数分别为零可得

$$a_1'(x)=\alpha(x)+2c, \tag{10}$$

$$a_0'(x)=[\alpha(x)+c]\,a_1(x)-2\,[\alpha\,x+\beta\,x^2+\gamma\,x^3], \tag{11}$$

$$[\alpha\, x+\beta\, x^2+\gamma\, x^3]\, a_1(x)=\alpha(x)\, a_0(x)\,. \tag{12}$$

下面我们来确定 $\alpha(x)$, $a_i(x)$ $(i=0,1,2)$. 这里多项式 $\alpha(x)$ 的次数为 0 或 1. 事实上若 $\deg[\alpha(x)]>1$, 设 $\deg[\alpha(x)]=k$ $(k>1)$, 则由 (10) 和 (11) 式可得 $\deg[a_1(x)]=k+1$, $\deg[a_0(x)]=2k+2$, 由 (12) 式可得 $k+4=3k+2$, 从而得 $k=1$, 这与 $k>1$ 矛盾. 接下来, 我们将分 $\deg[\alpha(x)]=0$ 和 $\deg[\alpha(x)]=1$ 两种情况分别来确定 $p(x,y)$, 并求得方程 (1) 的精确解.

1). $\deg[\alpha(x)]=0$

此时, $\deg[a_1(x)]=1$, 取 $\alpha(x)=\alpha_0$, $a_1(x)=a_1 x+a_0$. 将其代入 (10) 和 (11) 式可得

$$\alpha(x)=\alpha_0=a_1-2\,c\,, \tag{13}$$

$$a_0(x)=-\frac{\gamma}{2}\,x^4-\frac{2\,\beta}{3}\,x^3+(\frac{a_1^2}{2}-\alpha-\frac{c\,a_1}{2})\,x^2+(a_0\,a_1-c\,a_0)\,x+d\,, \tag{14}$$

其中 $d$ 为积分常数. 将 $a_1(x)$, (13) 和 (14) 代入 (12) 式, 可得

$$a_0=\frac{4\,c^3}{9\,\beta}\,,\ a_1=\frac{2\,c}{3}\,,\ d=0\,, \tag{15}$$

其中 $c^2=\frac{9\,\alpha}{4}=\frac{\beta^2}{2\,\gamma}$.

将 $a_2(x)=1$, (13)–(15) 代入方程 (7), 并借助于符号计算系统 Mathematica 解之可得

$$y=\frac{2\,c^2\,x+3\,\beta\,x^2}{6\,c}\,, \tag{16}$$

$$y=-\frac{8\,c^4+18\,c^2\,\beta\,x+9\,\beta^2\,x^2}{18\,c\,\beta}\,, \tag{17}$$

由于 $x=u$, $y=u'$, 从而有

$$u(x,t)=\frac{2\,C_0\,c^2\,e^{\frac{c(x-c\,t)}{3}}}{1-3\,C_0\,\beta\,e^{\frac{c(x-c\,t)}{3}}}\,, \tag{18}$$

$$u(x,t)=\frac{c^2}{3\,\beta}\,\tanh[\frac{c(x-c\,t)}{6}-3\,C_1\,c\,\beta]-\frac{c^2}{\beta}\,, \tag{19}$$

其中 $C_0, C_1$ 为积分常数, $c^2=\frac{9\,\alpha}{4}=\frac{\beta^2}{2\,\gamma}$. 若分别取 $C_0=-\frac{1}{3\,\beta}$ 和 $C_0=\frac{1}{3\,\beta}$, 则由 (18) 式可以得到方程 (1) 的类孤立波解

$$u(x,t)=-\frac{c^2}{3\,\beta}\,[\tanh\frac{c(x-c\,t)}{6}+1], \tag{20}$$

$$u(x,t)=-\frac{c^2}{3\,\beta}\,[\coth\frac{c(x-c\,t)}{6}+1]\,, \tag{21}$$

其中 $c^2=\frac{9\,\alpha}{4}=\frac{\beta^2}{2\,\gamma}$. 这里 (18) 式是方程 (1) 的新的精确解, (19)–(21) 式是方程 (1) 的同于文献 [9–11] 的类孤立波解.

2). $\deg[\alpha(x)]=1$

此时, $\deg[a_1(x)]=2$, 取 $\alpha(x)=\alpha_1\,x+\alpha_0$, $a_1(x)=a_2\,x^2+a_1\,x+a_0$. 将其代入 (10) 和 (11) 式可得

$$\alpha(x)=\alpha_1\,x+\alpha_0=2\,a_2\,x+(a_1-2\,c)\,, \tag{22}$$

$$a_0(x) =(\frac{a_2^2}{2}-\frac{\gamma}{2})\,x^4+(a_1\,a_2-\frac{c\,a_2}{3}-\frac{2\,\beta}{3})\,x^3+(\frac{a_1^2}{2}-\alpha-\frac{c\,a_1}{2}+a_0\,a_2)\,x^2+ (a_0\,a_1-c\,a_0)\,x+d\,, \tag{23}$$

其中 $d$ 为积分常数．将 $a_1(x)$, (22) 和 (23) 代入 (12) 式，可得

$$a_0=0\,,\ a_1=\frac{2\,(c\,\sqrt{\gamma}\pm\sqrt{2}\,\beta)}{3\,\sqrt{\gamma}}\,,\ a_2=\pm\sqrt{2\,\gamma}\,,\ d=0\,, \tag{24}$$

其中 $\alpha=\frac{2\,\beta^2\mp c\,\beta\,\sqrt{2\,\gamma}-2\,c^2\,\gamma}{9\,\gamma}$.

将 $a_2(x)=1$, (22)–(24) 代入方程 (7), 并借助于符号计算系统 Mathematica 解之可得

$$y=-\frac{2\,(\sqrt{2}\,\beta+c\,\sqrt{\gamma})\,x+3\,\sqrt{2}\,\gamma\,x^2}{6\,\sqrt{\gamma}}\,, \tag{25}$$

其中 $\alpha=\frac{2\,\beta^2-c\,\beta\,\sqrt{2\,\gamma}-2\,c^2\,\gamma}{9\,\gamma}$.

$$y=-\frac{2\,(\sqrt{2}\,\beta-c\,\sqrt{\gamma})\,x+3\,\sqrt{2}\,\gamma\,x^2}{6\,\sqrt{\gamma}}\,, \tag{26}$$

其中 $\alpha=\frac{2\,\beta^2+c\,\beta\,\sqrt{2\,\gamma}-2\,c^2\,\gamma}{9\,\gamma}$. 由于 $x=u$, $y=u'$, 从而可得方程 (1) 的精确解

$$u(x,t)=\frac{2\,(\sqrt{2}\,\beta+c\,\sqrt{\gamma})}{C_2\,e^{\frac{c\,\sqrt{\gamma}+\sqrt{2}\,\beta}{3\,\sqrt{\gamma}}\,(x-c\,t)}-3\,\sqrt{2}\,\gamma}, \tag{27}$$

其中 $C_2$ 为积分常数， $c=-\frac{\beta\,\sqrt{2\,\gamma}\pm3\,\sqrt{2\,\beta^2\,\gamma-8\,\alpha\,\gamma^2}}{4\,\gamma}$.

$$u(x,t)=\frac{2\,(\sqrt{2}\,\beta-c\,\sqrt{\gamma})}{C_3\,e^{\frac{c\,\sqrt{\gamma}-\sqrt{2}\,\beta}{3\,\sqrt{\gamma}}\,(x-c\,t)}-3\,\sqrt{2}\,\gamma}, \tag{28}$$

其中 $C_3$ 为积分常数， $c=\frac{\beta\,\sqrt{2\,\gamma}\pm3\,\sqrt{2\,\beta^2\,\gamma-8\,\alpha\,\gamma^2}}{4\,\gamma}$. 若分别取 $C_2=C_3=3\,\sqrt{2\,\gamma}$, 则由 (27) 和 (28) 式可以得到方程 (1) 的与文献 [11] 相同的类孤立波解

$$u(x,t)=(\sqrt{2}\,\beta+c\,\sqrt{\gamma})\,[\coth\frac{c\,\sqrt{\gamma}+\sqrt{2}\,\beta}{6\,\sqrt{\gamma}}\,(x-c\,t)-1]\,, \tag{29}$$

其中 $c=-\frac{\beta\,\sqrt{2\,\gamma}\pm3\,\sqrt{2\,\beta^2\,\gamma-8\,\alpha\,\gamma^2}}{4\,\gamma}$.

$$u(x,t)=(\sqrt{2}\,\beta-c\,\sqrt{\gamma})\,[\coth\frac{c\,\sqrt{\gamma}-\sqrt{2}\,\beta}{6\,\sqrt{\gamma}}\,(x-c\,t)-1]\,, \tag{30}$$

其中 $c=\frac{\beta\,\sqrt{2\,\gamma}\pm3\,\sqrt{2\,\beta^2\,\gamma-8\,\alpha\,\gamma^2}}{4\,\gamma}$. 这里 (27), (28) 式是方程 (1) 的新的精确解.

## 4 结论

借助于符号计算系统 Mathematica, 本文应用首次积分法求解了一类非线性反应扩散方程, 并得到了它的精确解. 这些精确解不仅包括了以前的论文中求得的类孤立波解, 而且较之更具有一般性, 因而扩展了该类反应扩散方程解的范围.

从文中我们可以得到如下结论, 应用首次积分可以求得一些非线性偏微分方程的精确解, 而且这些精确解比用双曲函数展开法或基于 Riccati 方程的辅助函数展开法所得到的精确解更为广泛; 取合适的 $\alpha, \beta, \gamma$ 的值, 根据文中的讨论可以得到 Fisher 方程、Huxley 方程、Burgers-Huxley 方程、 Chaffee-Infanfe 方程和 Fitzhugh-Nagumo 方程等的精确解.

## 参考文献:

[1] WANG Ming-liang. *Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations* [J]. Phys. Lett. A, 1995, **199**(3-4): 169–172.
[2] FAN En-gui. *Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations* [J]. Phys. Lett. A, 2000, **277**(4-5): 212–218.
[3] FU Zun-tao, LIU Shi-kuo, LIU Shi-da. et al. *New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations* [J]. Phys. Lett. A, 2001, **290**(1-2): 72–76.
[4] ZHOU Yu-bin, WANG Ming-liang, WANG Yue-ming. *Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients* [J]. Phys. Lett. A, 2003, **308**(1): 31–36.
[5] FENG Zhao-sheng. *On explicit exact solutions to the compound Burgers-KdV equation* [J]. Phys. Lett. A, 2002, **293**(1-2): 57–66.
[6] FENG Zhao-sheng. *Exact solution to an approximate sine-Gordon equation in $(n+1)$-dimensional space* [J]. Phys. Lett. A, 2002, **302**(2-3): 64–76.
[7] FENG Zhao-sheng, WANG Xiao-hui. *The first integral method to the two-dimensional Burgers-Korteweg-de Vries equation* [J]. Phys. Lett. A, 2003, **308**(2-3): 173–178.
[8] 范恩贵. 可积系统与计算机代数 [M]. 北京:科学出版社, 2004, 145–178.
FAN En-gui. *Integrable System and Compter Algebra* [M]. Beijing: Science Press, 2004, 145–178. (in Chinese)
[9] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法 [J]. 数学物理学报, 1998, **47**(3): 353–362.
FAN En-gui, ZHANG Hong-qing. *The homogeneous balance method for solving nonlinear soliton equations* [J]. Acta Phys. Sinica, 1998, **47**(3): 353–362. (in Chinese)
[10] 王霞, 吕岿, 郑春龙. 一类非线性反应扩散方程的双曲函数级数解法 [J]. 上饶师范学院学报, 2001, **21**: 36–40.
WANG Xia, LU Kui, ZHENG Chun-long. *Hyperbolio function series method for solving a kind of nonlinear reation diffusion equtions* [J]. J. Shangrao Teachers College, 2001, **21**: 36–40. (in Chinese)
[11] 周钰谦, 吴曦, 张健. 一类反应扩散方程的新精确解 [J]. 四川师范大学学报, 2003, **26**(5): 448–451.
ZHOU Yu-qian, WU Xi, ZHANG Jian. *New exact solutions to a class of reaction-diffusion equations* [J]. Sichuan Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban, 2003, **26**(5): 448–451. (in Chinese)
[12] 周钰谦, 张健. 一类反应扩散方程的显式复线形孤子解 [J]. 四川师范大学学报, 2004, **27**(2): 144–146.
ZHOU Yu-qian, ZHANG Jian. *Complex linear solitary wave solutions for a class of reaction-diffusing equations* [J]. Sichuan Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban, 2004, **27**(2): 144–146. (in Chinese)

## Exact Solutions for a Kind of Reaction Diffusion Equations

*XU Shu-jiang*[1,2], *GUO Yu-cui*[2], *LI Hua-ying*[2]
(1. Shandong Computer Science Center, Shandong 250014, China;
2. School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing, 100876, China )

**Abstract**: Applying a new method called the first integral method, we obtain some exact solutions of a kind of reaction diffusion equations $u_t - u_{xx} + \alpha\, u + \beta\, u^2 + \gamma\, u^3 = 0$. These solutions not only include the soliton solutions that obtained in the previous literature, but also include some new exact solutions.

**Key words**: reaction diffusion equations; first integral method; exact solutions.