第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0949-06 **文献标识码**: A

复正定矩阵的行列式不等式

赵 礼 峰
(南京邮电大学数理学院，江苏 南京 210003)
(E-mail: zhlifeng9999@163.com)

摘 要: 本文指出了文献 [3–6] 中的一些不正确的结论，并给出了复正定矩阵的行列式不等式.

关键词: 复正定矩阵；不等式；行列式； Schur 补.
MSC(2000): 15A18; 15A42
中图分类: O151.2

1 引言与记号

在文献 [1–6] 的基础上，本文研究了复正定矩阵的行列式，指出了文献 [3–6] 中一些不正确的结论，并给出了复正定矩阵的行列式不等式. 设 A 是 n 阶复矩阵， A^* 表示 A 的共轭转置, $A>0$ ($A\geq 0$) 表示 A 是 Hermite 正定 (半正定) 矩阵； $|\mathrm{det}A|$ 表示 A 的行列式 $\mathrm{det}A$ 的模. 设 $A=\begin{pmatrix} A_k & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 若 A_k 可逆， A 关于 A_k 的 Schur 补记为 $A/A_k=D-CA_k^{-1}B$, 若 D 可逆， A 关于 D 的 Schur 补记为 $A/D=A_k-BD^{-1}C$; $\forall A\in C^{n\times n}$, $A=H(A)+S(A)$, 其中 $H(A)=\frac{A+A^*}{2}$ 和 $S(A)=\frac{A-A^*}{2}$ 分别表示 A 的 Hermite 部分和反 Hermite 部分 [7]. 文献 [1–2] 给出了复正定矩阵的理论，文献 [4–6] 把文献 [3] 中亚正定矩阵行列式不等式推广到复正定矩阵，并得到广义的 Minkowski 不等式，下面分别用命题 1–4 表示相应的结论.

命题 1[3, 定理 2] 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geq 2, A$ 是 n 阶亚正定矩阵， B 是 n 阶实对称正定矩阵，则

$$(\mathrm{det}(A+B))^{\frac{1}{n}}>(\mathrm{det}A)^{\frac{1}{n}}+(\mathrm{det}B)^{\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

命题 2[4, 定理 3] 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geq 2, A$ 是亚正定矩阵， B 是 n 阶实对称正定 (半正定) 矩阵，则

$$(\mathrm{det}(A+B))^{s}\geq(\mathrm{det}A)^{s}+(\mathrm{det}B)^{s}, \tag{2}$$

其中 s 是使 $s(n+t)\geq 2$ 的任一实数，而 t 是 AB^{-1} 的实特征值的个数.

命题 3[5, 定理 2] 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geq 2, A$ 是 n 阶复正定 (半正定) 矩阵，$B>0$, $\mathrm{det}(\lambda B-A)=0$ 的复根个数为 s, 则

$$|(\mathrm{det}(A+B)|^{\frac{2}{2n-s}}\geq|\mathrm{det}A|^{\frac{2}{2n-s}}+|\mathrm{det}B|^{\frac{2}{2n-s}} \tag{3}$$

等号成立的充要条件是 $\mathrm{det}(\lambda B-A)=0$ 的复根为纯虚数且模长相等，实根相等且等于复根模的平方.

收稿日期: 2005-03-21; **接受日期**: 2005-10-23
基金项目: 国家自然科学基金 (10271021).

命题 4[6], 定理 1 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\geq 2, A$ 是 n 阶复正定矩阵, $B>0, B^{-1}A$ 的非实特征根是 m 对共轭复数, 则

$$|(\det(A+B)|^{\frac{1}{n-m}}\geq |\det A|^{\frac{1}{n-m}}+|\det B|^{\frac{1}{n-m}}. \tag{4}$$

我们说以上的结论均不正确, 从而这些命题的相关推论也不正确.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}10 & 0\\ -9 & 10\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, A 是亚正定矩阵, B 是实对称正定矩阵, $(\det(A+B))^{\frac{1}{2}}=\sqrt{134}$, $(\det A)^{\frac{1}{2}}+(\det B)^{\frac{1}{2}}=10+\sqrt{3}>\sqrt{134}$, 故命题 1 不正确.

例 2 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{21}{5} & 0\\ -\frac{11}{5} & \frac{21}{5}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, A 是亚正定矩阵, $B>0$, $AB^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{14}{5} & \frac{7}{5}\\ -\frac{1}{15} & \frac{31}{15}\end{pmatrix}$, AB^{-1} 的特征多项式是 $\lambda^2-\frac{73}{15}\lambda+\frac{441}{75}$ 有两个互异的实根, 复根个数是 0, 在命题 2 中 $n=2, t=2$, 取 $s=\frac{1}{2}$, 满足 $s(n+t)=2$, $(\det(A+B))^s=\sqrt{35.4}$, $(\det A)^s+(\det B)^s=4.2+1.732=5.932>\sqrt{35.4}$, 故命题 2 不正确.

在命题 3 中, 方程 $\det(\lambda B-A)=0$ 等价于 $\det(\lambda E-AB^{-1})=0$, 例 2 中, $\det(\lambda B-A)=0$ 的复根个数为 0, $n=2$, 此时命题 3 变成 $(\det(A+B))^{\frac{1}{2}}\geq(\det A)^{\frac{1}{2}}+(\det B)^{\frac{1}{2}}$, 故命题 3 不正确.

由于 $B^{-1}A$ 与 AB^{-1} 有相同的特征值, 由例 2 知 $B^{-1}A$ 非实特征值的个数为 0, 命题 4 中 $m=0$, 此时该命题变成 $|\det(A+B)|^{\frac{1}{2}}>|\det A|^{\frac{1}{2}}+|\det B|^{\frac{1}{2}}$, 由例 2 知命题 4 不正确.

2 主要结果

为了本文的目的, 先给出几个引理

引理 1[2] 设 $A\in C^{n\times n}, n\geq 2$, A 是复正定矩阵, 则对任何可逆矩阵 $P\in C^{n\times n}$, P^*AP 是 n 阶复正定矩阵.

引理 2 设 $A\in C^{n\times n}$, A 是复正定矩阵, $B>0$, 则有可逆矩阵 $P\in C^{n\times n}$ 使

$$P^*BP=E_n, P^*AP=\begin{pmatrix}a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & a_r & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_s\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中 E_n 是 n 阶单位矩阵, $a_k\in R^+, k=1,\ldots,r$, $\mathrm{Re}\lambda_j>0$, $j=1,2,\ldots,s, r+s=n$.

证明 由 $B>0$, 故有可逆矩阵 $Q\in C^{n\times n}$ 使 $Q^*BQ=E_n$, 再由 Schur 定理, 存在酉矩阵 $U\in C^{n\times n}$ 使 $U^*(Q^*AQ)U=\begin{pmatrix}a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & a_r & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_s\end{pmatrix}$, 由引理 1 及文献 [2] 知, $a_k>0$, $\mathrm{Re}\lambda_j>0$. 令 $P=QU$, 则 P 可逆且使 (5) 式成立.

引理 3[2] 设 $A\in C^{n\times n}$, A 是复正定矩阵, 则

(1) A 的任一主子阵也是复正定矩阵. (2) A 可逆, 且 A^{-1} 也复正定.

引理 4[2] 设 $A\in C^{n\times n}$, A 是复正定矩阵，则对任一满足 $1\le k\le n-1$ 的整数 k, A_k 为 A 的 k 阶顺序主子阵，则 A/A_k 也是复正定矩阵.

引理 5[10] 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是正实数，又设 $0<r\le s$, 则 $(\sum_{k=1}^n a_k^s)^{\frac{1}{s}}\le(\sum_{k=1}^n a_k^r)^{\frac{1}{r}}$.

引理 6 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是正实数， $\forall r>0$ 且 $a_n^r\ge\sum_{k=1}^{n-1}a_k^r$, 则 $\forall t\ge r, a_n^t\ge\sum_{k=1}^{n-1}a_k^t$.

定理 1 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\ge 2$, A 是 n 阶复正定矩阵， $B>0$, 则

$$|\det(A+B)|>|\det A|+|\det B|. \tag{6}$$

证明 由引理 2 知存在可逆阵 $P\in C^{n\times n}$, 使 (5) 式成立，故有

$$\begin{aligned}
&|\det P^*P|^2|\det(A+B)|^2=|\det(P^*AP+P^*BP)|^2=|\prod_{k=1}^r(1+a_k)\prod_{j=1}^s(1+\lambda_j)|^2\\
&=\prod_{k=1}^r(1+a_k^2+2a_k)\prod_{j=1}^s(1+|\lambda_j|^2+2\mathrm{Re}\lambda_j)>\prod_{k=1}^r(1+a_k^2)\prod_{j=1}^s(1+|\lambda_j|^2)\\
&=(1+a_1^2)\prod_{k=2}^r(1+a_k^2)\prod_{j=1}^s(1+|\lambda_j|^2),
\end{aligned}$$

由 Hölder 第二不等式知

$$\begin{aligned}
&(1+a_1^2)\prod_{k=2}^r(1+a_k^2)\prod_{j=1}^s(1+|\lambda_j|^2)>(1+a_1^2)(1+\prod_{k=2}^r a_k^2\prod_{j=1}^s|\lambda_j|^2)\\
&=1+a_1^2+\prod_{k=2}^r a_k^2\prod_{j=1}^s|\lambda_j|^2+\prod_{k=1}^r a_k^2\prod_{j=1}^s|\lambda_j|^2\\
&\ge 1+2\sqrt{\prod_{k=1}^r a_k^2\prod_{j=1}^s|\lambda_j|^2}+\prod_{k=1}^r a_k^2\prod_{j=1}^s|\lambda_j|^2=\Big(1+\sqrt{\prod_{k=1}^r a_k^2\prod_{j=1}^s|\lambda_j|^2}\ \Big)^2\\
&=(|\det P^*BP|+\sqrt{|\det P^*AP|^2})^2=|\det P^*P|^2(|\det B|+|\det A|)^2,
\end{aligned}$$

约去 $|\det P^*P|^2$ 并开方即得 (6) 式成立.

定理 2 设 $A,B\in C^{n\times n}, n\ge 2$, A 是复正定矩阵， $B\ge 0$ 则

$$|\det(A+B)|>|\det A|. \tag{7}$$

证明 由 $0<r\le n-1$ 及 $B\ge 0$ 知有可逆矩阵 $P\in C^{n\times n}$ 使 $P^*BP=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$[8], 记 $P^*AP=\bar{A}=\begin{pmatrix}C&D\\F&G\end{pmatrix}$, C 为 r 阶方阵， A 是 n 阶复正定矩阵，由引理 1 知 P^*AP 是复正定矩阵，从而由引理 4 知 $\bar{A}/G$ 是复正定矩阵，且

$$\begin{aligned}
|\det P^*P||\det(A+B)|&=|\det(P^*AP+P^*BP)|=|\det[\begin{pmatrix}C&D\\F&G\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}]|\\
&=|\det[\begin{pmatrix}\bar{A}/G&0\\F&G\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}]|=|\det(\bar{A}/G+E_r)||\det G|,
\end{aligned}$$

由定理 1 知 $|\det(\bar{A}/G+E_r)|>|\det\bar{A}/G|+1$, 从而

$$|\det P^*P||\det(A+B)|>|\bar{A}/G||\det G|+|\det G|>|\bar{A}/G||\det G|=|\det A|=|P^*AP|=|P^*P||\det A|,$$

约去 $|\det P^*P|$, 即得 (7) 式成立.

定理 3 设 $A,B\in C^{n\times n}$, $n\geq 2$, A 是复正定矩阵, $B>0$, 则

$$(\det(A+B))^{\frac{2}{n}}>(\det A)^{\frac{2}{n}}+(\det B)^{\frac{2}{n}}. \tag{8}$$

证明 由 A 是复正定矩阵, $B>0$, 根据引理 2 知存在可逆阵 $P\in C^{n\times n}$, 使 (5) 式成立, 于是

$$|\det P^*P|^{\frac{2}{n}}|\det(A+B)|^{\frac{2}{n}}=|\det(P^*AP+P^*BP)|^{\frac{2}{n}}=|\prod_{k=1}^{r}(1+a_k)\prod_{j=1}^{s}(1+\lambda_j)|^{\frac{2}{n}}|$$

$$=(\prod_{k=1}^{r}(1+a_k)^2\prod_{j=1}^{s}(1+\lambda_j)^2)^{\frac{1}{n}}=[\prod_{k=1}^{r}(1+a_k^2+2a_k)\prod_{j=1}^{s}(1+|\lambda_j|^2+2\mathrm{Re}\lambda_j)]^{\frac{1}{n}}$$

$$>[\prod_{k=1}^{r}(1+a_k^2)\prod_{j=1}^{s}(1+|\lambda_j|^2)]^{\frac{1}{n}},$$ 由 Hölder 第二不等式

$$|\det P^*P|^{\frac{2}{n}}|\det(A+B)|^{\frac{2}{n}}>[\prod_{k=1}^{r}(1+a_k^2)\prod_{j=1}^{s}(1+|\lambda_j|^2)]^{\frac{1}{n}}\geq 1+\prod_{k=1}^{r}a_k^{\frac{2}{n}}\prod_{j=1}^{s}|\lambda_j|^{\frac{2}{n}}$$

$$=|\det P^*BP|^{\frac{2}{n}}+|\det P^*AP|^{\frac{2}{n}}=|\det P^*P|^{\frac{2}{n}}(|\det B|^{\frac{2}{n}}+|\det A|^{\frac{2}{n}}),$$

约去 $|\det P^*P|^{\frac{2}{n}}$, 即得 (8) 式成立.

由定理 3 及引理 5 可得

推论 1 设 $A,B\in C^{n\times n}$, $n\geq 2$, A 是复正定矩阵, $B>0$, 则 $\forall\alpha\geq\frac{2}{n}$, 有

$$(\det(A+B))^{\alpha}>(\det A)^{\alpha}+(\det B)^{\alpha}. \tag{9}$$

证明 由 $\alpha\geq\frac{2}{n}$ 得 $\frac{2}{n\alpha}\leq 1$, 根据由定理 3 及引理 5 可得

$$\begin{aligned}|\det(A+B)|^{\alpha}&=(|\det(A+B)|^{\frac{2}{n}})^{\frac{n\alpha}{2}}>(|\det A|^{\frac{2}{n}}+|\det B|^{\frac{2}{n}})^{\frac{n\alpha}{2}}\\&=[(|\det A|^{\alpha})^{\frac{2}{n\alpha}}+(|\det B|^{\alpha})^{\frac{2}{n\alpha}}]^{\frac{n\alpha}{2}}\\&\geq(|\det A|^{\alpha})^{1}+(|\det B|^{\alpha})^{1}=|\det A|^{\alpha}+|\det B|^{\alpha}.\end{aligned}$$

推论 2 设 $A,B\in C^{n\times n}$, A 是复正定矩阵, $B>0$, 则有

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}}>\frac{1}{2}(|\det A|^{\frac{1}{n}}+|\det B|^{\frac{1}{n}}). \tag{10}$$

注 本推论改正了命题 1 的结论.

证明 令 $A_1=\begin{pmatrix}A&0\\0&E_n\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}B&0\\0&E_n\end{pmatrix}$, 则矩阵 A_1 是 $2n$ 阶的复正定矩阵和 $B_1>0$, 从而由定理 3 可以得到

$$\begin{aligned}|\det(A_1+B_1)|^{\frac{2}{2n}}&=(2^n|\det(A+B)|)^{\frac{2}{2n}}=2|\det(A+B)|)^{\frac{1}{n}}\\&>|\det A_1|^{\frac{2}{2n}}+|\det B_1|^{\frac{2}{2n}}=|\det A|^{\frac{1}{n}}+|\det B|^{\frac{1}{n}},\end{aligned}$$

从而 (10) 式成立.

定理 4 设 $A\in C^{n\times n}$, A 是 $n(n\geq 2)$ 阶复正定矩阵, 则 $\forall t\geq\frac{2}{n}$, 有

$$|\det A|^{t}>|\det H(A)|^{t}+|\det S(A)|^{t}.$$

证明 由文献 [11] 的定理 2 知道 $|\mathrm{det}A|^{\frac{2}{n}} > |\mathrm{det}H(A)|^{\frac{2}{n}} + |\mathrm{det}S(A)|^{\frac{2}{n}}, \forall t \geq \frac{2}{n}$, 又由引理 6 知道 $|\mathrm{det}A|^t > |\mathrm{det}H(A)|^t + |\mathrm{det}S(A)|^t$, 特别地取 $t=1$ 时， $|\mathrm{det}A| > |\mathrm{det}H(A)| + |\mathrm{det}S(A)|$.

定义 设 A 是 n 阶复正定矩阵， $n \geq 2$, 则对任一满足 $1 \leq k \leq n-1$ 的整数 k, A_k 为 A 的 k 阶顺序主子阵，若 n 阶复矩阵 $A = \begin{pmatrix} A_k & B \\ B^* & D \end{pmatrix}$, 则称 A 是 k- 局部 Hermite 矩阵，又若 k 阶顺序主子阵 A_k 也是 Hermite 矩阵，则称 A 是 k- 局部完全 Hermite 矩阵. ($D = D^*$, 则称 A 是 k- 局部完全 Hermite 矩阵).

对 k- 局部完全 Hermite 矩阵，有以下结论.

定理 5 设 $A, B \in C^{n\times n}$, $n \geq 2$, A 是 k- 局部完全 Hermite 矩阵, 且是复正定矩阵，$B > 0$, 则

$$|\mathrm{det}(A+B/(A_k+B_k))| > |\mathrm{det}(A/A_k)| + |\mathrm{det}(B/B_k)|. \tag{11}$$

证明 由 A 是 k- 局部完全 Hermite 矩阵, 且是复正矩阵, $B>0$, 则可设 $A = \begin{pmatrix} A_k & A_{12} \\ A_{12}^* & \tilde{A} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_k & B_{12} \\ B_k^* & \tilde{B} \end{pmatrix}$, 由于 A 复正定矩阵， $B>0$, 故由引理 4 知 $A/A_k, B/B_k$ 均为复正定矩阵，于是 $A/A_k + B/B_k$ 复正定，又 $(A+B)_k = A_k + B_k$, 从而

$$\begin{aligned} M =&(A+B)/(A+B)_k - (A/A_k + B/B_k) \\ =&\tilde{A} + \tilde{B} - (A_{12}^* + B_{12}^*)(A_k+B_k)^{-1}(A_{12}+B_{12}) - (\tilde{A} - A_{12}^*A_k^{-1}A_{12}) - (\tilde{B} - B_{12}^*B_k^{-1}B_{12}) \\ =&A_{12}^*A_k^{-1}A_{12} + B_{12}^*B_k^{-1}B_{12} - (A_{12}^*+B_{12}^*)(A_k+B_k)^{-1}(A_{12}+B_{12}) - \\ &A_{12}^*(A_k+B_k)^{-1}B_{12} - B_{12}^*(A_k+B_k)^{-1}A_{12}. \end{aligned}$$

又易证 [3]

$$\begin{aligned} &A_k^{-1} - (A_k+B_k)^{-1} = (A_k + A_kB_kA_k)^{-1}, \\ &B_k^{-1} - (A_k+B_k)^{-1} = B_k^{-1}A_k(A_k + A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}A_kB_k^{-1}, \\ &(A_k+B_k)^{-1} = (A_k + A_kB_k^{-1}A_k)A_kB_k^{-1}, \\ &(A_k+B_k)^{-1} = B_k^{-1}A_k(A_k + A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}, \end{aligned}$$

由于， $A_k^* = A_k, B_k^* = B_k$, 故

$$\begin{aligned} M &= (A_{12}^* - B_{12}^*B_k^{-1}A_k^*)(A_k + A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}(A_{12} - A_kB_k^{-1}B_{12}) \\ &= (A_{12}^* - A_kB_k^{-1}B_{12})^*(A_k + A_kB_k^{-1}A_k)^{-1}(A_{12} - A_kB_k^{-1}B_{12}). \end{aligned}$$

由 $A_k > 0, B_k > 0$, 则 $B_k^{-1} > 0$, 从而 $A_k + A_k^*B_k^{-1}A_k = A_k + A_kB_k^{-1}A_k > 0, (A_k + A_kB_k^{-1}A_k)^{-1} > 0$, 因此 $M \geq 0$. 由定理 1 与定理 2 知

$$\begin{aligned} |\mathrm{det}(A+B/(A_k+B_k))| = |\mathrm{det}(M + A/A_k + B/B_k)| &\geq |\mathrm{det}(A/A_k + B/B_k)| \\ &> |\mathrm{det}A/A_k| + |\mathrm{det}B/B_k|. \end{aligned}$$

推论 3 在定理 5 的条件下有

$$|\mathrm{det}(A+B)| > |\mathrm{det}A|(1 + \frac{|\mathrm{det}B_k|}{|\mathrm{det}A_k|}) + |\mathrm{det}B|(1 + \frac{|\mathrm{det}A_k|}{|\mathrm{det}B_k|}). \tag{12}$$

证明 由于 $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ A_{12}^*A_k^{-1} & E_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & A_{12} \\ A_{12}^* & \tilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_k & -A_k^{-1}A_{12} \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A/A_k \end{pmatrix}$, 取行列式得 $\det A = \det A_k \det A/A_k$, 即 $\det A/A_k = \frac{\det A}{\det A_k}$, 由定理 5 及上式得到

$$\begin{aligned}|\det(A+B)| &> (|\det A_k| + |\det B_k|)(\frac{|\det A|}{|\det A_k|} + \frac{|\det B|}{|\det B_k|}) \\ &= |\det A|(1 + \frac{|\det B_k|}{|\det A_k|}) + |\det B|(1 + \frac{|\det A_k|}{|\det B_k|}).\end{aligned}$$

参考文献:

[1] HORN R A, JOHNSON C R. *Matrix Analysis* [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[2] 李俊杰. 论复矩阵的正定性 [J]. 数学的实践与认识, 1995, **2**: 59–63.
LI Jun-jie. *The positive definite quality of complex matrix is discussed* [J]. Math. Pratice Theory, 1995, **2**: 59–63. (in Chinese)

[3] 屠伯埙. 亚正定阵理论 (II) [J]. 数学学报, 1991, **34**(1): 91–102.
TU Bo-xun. *Theory of meta-positive definite matrice(II)* [J]. Acta. Math. Sinica, 1991, **34**(1): 91–102. (in Chinese)

[4] 吕蕴霞, 张树青. 对 "关于《亚正定阵理论 (II) 》一文的错误 " 一文的注记 [J]. 数学研究与评论, 1999, **19**(3): 598–600.
LÜ Yun-xia, ZHANG Shu-qing. *A note for "The Mistakes on 'Theory of Sub-Positive Definite Matrix'"* [J]. J. Math. Res. Exposition, 1999, **19**(3): 598–600. (in Chinese)

[5] 何淦潼. 正定 Hermite 矩阵的若干行列式不等式 [J]. 数学研究与评论, 2002, **1**: 79–82.
HE Gan-tong. *Several determinant inequalities of positive definite Hermitian matrices* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2002, **22**(1): 79–82. (in Chinese)

[6] 袁晖坪. 复正定矩阵的 Minkowski 不等式 [J]. 数学研究与评论, 2001, **21**(3): 464–468.
YUAN Hui-ping. *Minkowski Ineqality over complex positive definite matrix* [J]. J. Math. Res. Exposition, 2001, **21**(3): 464–468. (in Chinese)

[7] BAI Zhong-zhi, GOLUB G H, NG M K. *Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems* [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 2003, **24**(3): 603–626.

[8] 王松贵, 贾忠贞. 矩阵论中的不等式 [M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1994.
WANG Song-gui, JIA Zhong-zhen. *Inequalities in Matrice Theory* [M]. Hefei: Anhui Education Press, 1994. (in Chinese)

[9] 屠伯埙. 高等代数 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1989.
TU Bo-xun. *Advanced Algebra* [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1989. (in Chinese)

[10] 徐利治, 王兴华. 数学分析的方法及例题选讲 [M], 北京: 高等教育出版社, 1983.
HSU L C, WANG Xing-hua. *Methods and Choices of Examples in Mathematics Analysis* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1983. (in Chinese)

[11] 梁景伟. 有关矩阵正定性的几个不等式 [J]. 数学的实践与认识, 1988, **1**: 56–60.
Liang Jing-wei. *Several inequality that the concerned positive definite quality of matrix* [J]. Math. Pratice Theory, 1988, **1**: 56–60. (in Chinese)

Some Determinantal Inequalities on Complex Positive Definite Matrices

ZHAO Li-feng

(Department of Mathematicas, Nanjing University of Post and Telecommumications, Jiangsu 210003, China)

Abstract: In this paper, some mistakes in papers [3–6] are pointed out. Some Determinantal inequalities on complex positive definite matrix are also presented.

Key words: complex positive definite matrix; inequality; determinant; Schur complement.