第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0987-06 **文献标识码**: **A**

惠更斯的 5 个概率问题

徐传胜 [1,2], 曲安京 [2]
(1. 临沂师范学院数学系, 山东 临沂 276005; 2. 西北大学数学与科学史研究中心, 陕西 西安 710069)
(E-mail: lysyxcs@163.com)

摘 要: 惠更斯在第一部概率论著作《论赌博中的计算》中提出 5 个概率问题, 但均无求解过程. 这 5 个问题既可看作实际问题, 又可看作该书中命题的延伸. 这些问题以机会问题为研究对象, 把赌博问题的分析提升到一定的理论高度. 这就为概率论的进一步发展奠定了坚实基础. 本文尝试以惠更斯的方法来解决这些问题, 再对比今日所用之法, 从中得到若干结论.

关键词: 概率论; 惠更斯; 递推法; 数学期望; 骰子.
MSC(2000): 60-03; OA72
中图分类: O11

概率论史界普遍认为, 帕斯卡 (B.Pascal, 1623–1662) 与费马 (P.de Fermat, 1601–1665)1654 年 7 月的通信标志着概率论的诞生. 然而他们的通信直至 1679 年才完全公布于世, 故概率论学科的形成应归功于惠更斯 (Christian Huygens, 1629–1695), 他于 1657 年 9 月出版的《论赌博中的计算》 (On Reckoning at Games of Chance) 宣告了概率论的诞生.

荷兰数学家惠更斯可谓一个全才, 在多个学科都做出重大贡献, 是与牛顿 (Isaac Newton,1642-1727) 齐名的科学家. 1655 年秋, 惠更斯访问巴黎, 期间获知前一年有一场关于概率问题的讨论, 但不知其具体解决方法及结果. 1656 年 4 月, 回国后的惠更斯系统研究了其中的概率原理, 并撰写成文. 此时范 · 舒藤 (Frans Van Sehooten) 正在筹印其《数学习题集》, 因而他建议惠更斯将此文印刷发表, 并亲自替学生将该文译成拉丁文.

1657 年 3 月在该书的最后一次校订时, 惠更斯将其论文增加为 9 个命题和 5 个问题. 惠更斯给范 · 舒藤的一封信作为该书的前言. 信中惠更斯强调了这一新理论的重要性, "我相信, 只要仔细研究这个课题, 就会发现它不仅与游戏有关, 而且蕴含着有趣而深刻的推理原则."

虽然惠更斯讨论的也是赌博问题, 但他与前人不同, 仅是把赌博作为理论模型, 而不是论文的全部意义. 引言是全书的思想基础, 他明确提出: "尽管在一个纯粹运气的游戏中结果是不确定的, 但一个游戏者或赢或输的可能性却可以确定." 可能性用的是 "probability", 其意义与今天的概率几无差别. 惠更斯的这种思想使得 "可能性" 成为可以度量、计算的数值, 具有客观实际意义的概念.

《论赌博中的计算》的写作方式很象一篇现代的概率论论文. 先从关于公平赌博值的一条公理出发, 推导出有关数学期望的 3 条基本定理, 利用这些定理和递推公式, 解决了 11 个博弈问题. 最后提出 5 个问题留给读者解答. 其中只有 3 个问题给出答案, 但均无具体的证明过程. 这 5 个问题既可以看作实际问题, 又可看作是书中命题的延伸.

收稿日期: 2005-09-13; **接受日期**: 2006-07-06
基金项目: 国家自然科学基金 (10471111); 吴文俊丝绸之路天元基金.

惠更斯的最后 5 个问题，虽也都是在形形色色的赌博机制中，计算一方取胜的概率，但难度较大、技巧性较强，在概率论诞生初期，这无疑是向同时代数学家的挑战 [1]. 他说："给我的读者 (如果有的话) 留下一些思考题应该是有益的，这将供他们练习或者打发时间. " 在此后的近百年里, 不少数学家对这些问题进行了研究, 其中所蕴含的概率思想对今日数学创造仍有重要启发意义. 因此，从某种意义上讲，惠更斯的这 5 个概率问题推动了概率论的发展.

问题 1 两人玩掷双骰子游戏. 若 A 掷出 6 点则赢，而 B 掷出 7 点为胜. A 先掷一次后， B 掷二次， A 再掷二次，如此下去直至一方获胜. 求 A 与 B 的胜负比是多少？ (答案: 10355:12276)

该问题是费马在 1656 年 6 月向惠更斯提出的，显然它为《论赌博中的计算》中命题 14 的推广. 该命题为:

A, B 二人轮流掷两颗均匀的骰子，若 A 先掷出 7 点，则 A 胜；若 B 先掷出 6 点，则 B 胜. B 先掷，求 A 获胜的概率.

惠更斯所给的解法为：设全部赌注为 t, A 获胜的期望为 x, 则 B 获胜的期望为 $t-x$, 故设当 B 掷时， A 的期望为 x; 当 A 掷时， A 的期望为 y. 因每次投掷时， A 的获胜概率为 $\dfrac{6}{36}$, B 的获胜概率为 $\dfrac{5}{36}$, 由命题 3 得

$$\frac{5}{36}\times 0+\frac{31}{36}=x,\quad \frac{6}{36}t+\frac{30}{36}x=y.$$

解得 $x=\dfrac{31t}{36}$, 即 A 获胜的概率为 $\dfrac{31}{36}$.

这个问题的求解与前面的方法不同，它是通过列代数方程来求解，这是惠更斯的独创，该方法后被雅可布 (Jacob Bernoulli, 1654–1705) 称之为 "惠更斯分析法"[2].

惠更斯虽没有给出进一步的讨论，但按其思想可得如下一般解法:

设 e_n 表示第 $n-1$ 次已掷完， A 掷第 n 次获胜的概率， p_A, p_B 分别表示 A, B 各自在单独一次投掷时获胜的概率 ($p_A+q_A=1, p_B+q_B=1$), 则由全概率公式可得

$$e_{2n}=q_Be_{2n+1},\quad e_{2n+1}=p_A+q_Ae_{2n+2},\quad n=0,1,\ldots$$

因为

$$e_{2n}=e_0,\ e_{2n+1}=e_1,\ e_0=q_Be_1,\ e_1=p_A+q_Be_0$$

解得

$$e_0=\frac{p_Aq_B}{1-q_Aq_B}$$

这里 $P_A=\dfrac{1}{6}$, $P_B=\dfrac{5}{36}$, $e_0=\dfrac{31}{36}$.

据上述思想，惠更斯在 1656 年 7 月 6 日写给卡卡维 (P.de Carcavi, 1600–1684) 的信中提到问题 1 解决方案.

由题意可知，掷骰子的顺序依次为 $ABBAABBA\cdots$. 若前 4 次都不成功，则第 5 次就犹如从头开始一样，且各次投掷间相互独立. 设 e_n 表示前 $n-1$ 次失败，第 n 次投掷时 A 获胜的数学期望，则有

$$e_4=p_1t+q_1e_1,\quad e_3=q_2e_4,\quad e_2=q_2e_3,\quad e_1=p_1t+q_1e_2$$

解得

$$\frac{e_1}{t}=\frac{p_1(1+q_1q_2^2)}{1-q_1^2q_2^2}=\frac{10355}{22631},$$

这里 $p_1=\dfrac{5}{36}$, $p_2=1-q_2$.

按今日术语，该问题可如下解之．设 A 表示 A 获胜， A_i 表示 A 在第 i 次获胜， B_i 表示 B 在第 i 次获胜，则

$$A=A_1+\overline{A_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{B_2}\,\overline{B_3}\,\overline{A_4}A$$

$$P(A)=p_1+q_1q_2^2p_1+q_1^2q_2^2P(A)$$

$$P(A)=\frac{p_1(1+q_1q_2^2)}{1-q_1^2q_2^2}=\frac{10355}{22631}.$$

问题 2 一袋中装有 4 个白球 8 个黑球， 3 人蒙住眼睛轮流摸球，依次为 A,B,C. 先得白球者获胜，求三人获胜的机会比.

这个问题由惠更斯提出，并在其 1665 年的笔记中给出解答．他假定黑球摸出后再放回．其思路为：设 x,y,z 分别表示 A,B,C 的获胜数学期望， $p=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$ 为摸出白球的概率， A 若第 1 次胜，则得全部赌注，否则其期望等于 z, 故有

$$x=pt+qz,\quad y=qx,\quad z=qy$$

解之

$$\frac{x}{t}=\frac{p}{1-q^3},\quad \frac{y}{t}=\frac{pq}{1-q^3},\quad \frac{z}{t}=\frac{pq^2}{1-q^3}$$

得所求胜负比为 $1:q:q^2$, 即为 $9:6:4$.

按今日术语求解如下：第 1 次摸出黑球的概率依次为

$$p,\ qp,\ q^2p,\ q^3p,\ \ldots,$$

此为一无穷级数，由级数求和公式得

$$P(A)=\frac{p}{1-q^3},\quad P(B)=\frac{pq}{1-q^3},\quad P(C)=\frac{pq^2}{1-q^3}$$

与惠更斯的结果一致．而若考虑摸出黑球不放回，则最多进行 9 次，由乘法公式可求其概率，进而由概率加法公式可得其胜负比为 $231:159:105$.

问题 3 有 40 张牌，每种花色 10 张．甲同乙打赌他能抽出花色不同的 4 张牌，每人投的赌注应是多少？ [3] (答案： 1000:8139)

这个问题由费马在 1656 年 6 月向惠更斯提出，在 1656 年 7 月 6 日惠更斯写给卡卡维的信中给出问题解决方案．其解法为：

设赌注为 1 个单位，n 张不同花色的牌取出后，甲获胜的数学期望为 e_n, 则其只能在 $10(4-n)$ 张中抽取不同花色的牌，则有递推公式

$$e_n=\frac{10(4-n)e_{n+1}}{40-n}$$

因 $e_4=1$, 则得 $e_0=\dfrac{10\times 20\times 30\times 40}{37\times 38\times 39\times 40}=\dfrac{1000}{9139}$.
按今日术语求解如下：设 A 表示所求事件，由古典概型计算公式得

$$P(A)=\frac{C_{10}^1C_{10}^1C_{10}^1C_{10}^1}{C_{40}^4}=\frac{1000}{9139}.$$

问题 4 一袋中装有 4 个白球 8 个黑球，甲同乙打赌他能在摸出的 7 个球中含有 3 个白球. 求二人获胜的机会比. [4]

这个问题由惠更斯提出，并在其 1665 年的笔记中记录着问题的答案.

设 $e(a,b)$ 表示已取 a 个白球 b 个黑球时甲获胜的数学期望，因余下的 $12-a-b$ 个球中有 $4-a$ 个白球， $8-b$ 个黑球，则有

$$e(a,b)=\frac{(4-a)e(a+1,b)+(8-b)e(a,b+1)}{12-a-b},\quad 0\le a\le 4, 0\le a+b\le 7.$$

边界条件为 $e(3,4)=t, e(a,7-a)=0, e(0,5)=0$. 且当 $a=0,1$ 时， $e(a,6-a)=0$. 从 $e(3,4)=t$ 开始，惠更斯得出 $e(3,3)=\frac{5t}{6}$, 经过 19 次迭代，最后得到

$$e(0,0)=\frac{35t}{99}.$$

因此，甲、乙获胜的机会比为 $35:64$. 从其笔记可以看出，惠更斯曾用对立事件来求解，并把问题变形. 他考虑只取 5 个球，其中有 1 个黑球的情况，仅计算了 9 步，就得到甲获胜的概率为 $42/99$.

然而，今日看来此题甚是简单. 由古典概型公式可得所求概率为

$$p=\frac{C_4^3C_8^4}{C_{12}^7}=\frac{4C_8^4}{C_{12}^5}=\frac{35}{99}.$$

问题 5 二人玩掷三颗骰子游戏，甲乙各有 12 个筹码，若掷出 11 点，甲给乙一个筹码，而掷出 14 点，则乙给甲一个筹码，直至两人中有一人输光. 求甲乙获胜的机会比. (答案：244140625:282429536481)

这个问题就是著名的赌徒输光问题，也叫具有两个吸收壁的随机游动问题. 它由帕斯卡向费马提出，后卡卡维于 1656 年 9 月 28 日的信中告知惠更斯，其中含有帕斯卡和费马的解答. 惠更斯在 1656 年 10 月 12 日给卡卡维的回信中提出自己的解法，其证明过程可在其 1676 年的读书笔记中发现.

帕斯卡的解答是从二人分数皆为 0 时开始计算，直至有一人得 12 分. 惠更斯也采取了这个形式. 设 $e(a,b)$ 表示甲已得 a 分，乙得 b 分时，甲获胜的数学期望，问题则确定 $e(0,0)$.

惠更斯首先从最简情形讨论，列表分析二人各有 2 个筹码时所有可能情况. 并得到以下方程：

$$e(1,0)=pe(2,0)+qe(1,1)=p+qe(0,0),$$

$$e(0,1)=pe(1,1)+qe(0,2)=pe(0,0),$$

$$e(0,0)=pe(1,0)+qe(0,1),$$

由此解得 $e(0,0)=\dfrac{p^2}{p^2+q^2}$. 这里 $p=\dfrac{15}{216}$, $q=\dfrac{27}{216}$.

类似地，惠更斯讨论了各有 4 个筹码、 8 个筹码、 3 个筹码、 5 个筹码、 6 个筹码的情形，最后导出 12 个筹码的情形，其结果为 $p^n:q^n$, 即 $5^{12}:9^{12}$. 从中可以看到，惠更斯的解法与帕斯卡的解法完全不同.

按今日术语可求解如下：考虑其一般情形，甲乙各有 n 个筹码.

设 $A=$ “第一次甲赢”，则 $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$ 且在第一局甲赢的条件下甲最终输光的概率为 f_{n+1}, 而在第一局甲输的条件下甲最终输光的概率为 f_{n-1}, 由全概率公式，得二阶齐次常系数差分方程及边界条件

$$f_n=pf_{n+1}+qf_{n-1}$$

与

$$f_0=1, f_{2n}=0.$$

则有

$$f_{n+1}-f_n=\frac{q}{p}(f_n-f_{n-1})=(\frac{q}{p})^2(f_{n-1}-f_{n-2})=\cdots=(\frac{q}{p})^n(f_1-f_0)=(\frac{q}{p})^n(f_1-1),$$

而

$$-1=f_{2n}-f_0=\sum_{k=0}^{2n-1}(f_{k+1}-f_k)=\sum_{k=0}^{2n-1}(\frac{q}{p})^n(f_1-1)=\frac{1-(\frac{q}{p})^{2n}}{1-\frac{q}{p}}(f_1-1),$$

得

$$f_1-1=-\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^{2n}},$$

所以

$$\begin{aligned}f_n&=-(\frac{q}{p})^{n-1}\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^{2n}}+f_{n-1}=f_0-\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^{2n}}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{q}{p})^k\\&=1-\frac{1-(\frac{q}{p})^n}{1-(\frac{q}{p})^{2n}}.\end{aligned}$$

此为甲最终输光的概率，也就是乙获胜的概率，由对立事件间的关系可得甲获胜的概率，进而得出甲乙获胜的胜负比，与惠更斯的结果相一致.

可以看到，惠更斯的概率理论比较完善，他以机会问题为研究对象，以期望作为基本概念和基本工具，总结了前人的代数和组合方法，把具体赌博问题的分析提升到一定的理论高度，这是有史以来第一个具有科学体系的概率论成果，为概率论的进一步发展奠定了坚实基础 [5]. 其主要表现在：

(1) 通过对有关概率问题地探索，概率、条件概率等概念的含义更加明确了. 尤其是定义和应用了数学期望.

(2) 在求解过程中，系统而正确地应用了概率的加法公式、乘法公式及全概率公式等一些基本公式. 另外还可引申出二项分布、负二项分布和几何分布等一些常见分布.

(3) 已初步建立递推法及方程分析法等一些计算技巧. 随机游动问题被提出，这是随机过程的最早雏形.

(4) 尽管一些重要结论仅停留在赌博问题上，尚未给出更一般形式，但经过系统的整理则可形成严密的理论体系.

值得注意的是，虽然惠更斯明确给出了概率的客观意义，但其概率计算全是通过期望来进行的. 从期望出发解释概率，与以概率定义期望的现代概率论恰恰相反. 正因如此，惠更斯的概率思想更值得进一步探讨.

参考文献:

[1] 李文林，等. 译. 数学史通论 [M]. 北京：高等教育出版社， 2004.
LI Wen-lin. et al. *A History of Mathematics an Introduction* [M]. Translation. Beijing: Higher Education Press, 2004. (in Chinese)

[2] HALD A. *A History of Probability and Statistics and Their Application before 1750* [M]. Awiley-Interscience Publication, 1990.

[3] DASTON L J. *Probabilistic expectation and rationality in classical probability theory* [J]. Historia Math., 1980, **7**(3): 234–260.

[4] TODHUNTER I. *A History of the Mathematical of Theory of Probability from the Times of Pascal to that of Laplace* [M]. New York: Chelsea, 1993 Reprint of the 1865 Edition.

[5] 徐传胜. 概率论简史 [J]. 数学通报， 2004, **1**: 36–39.
XU Chuan-Sheng. *A brief history of probability* [J]. Shuxue Tongbao, 2004, **10**: 36–39.

Huygens' Five Problems on Probability

XU Chuan-sheng[1,2], *QU An-jing*[2]
(1. Department of Mathematics, Linyi Teachers' College, Shandong 276001, China;
2. Centre for the History of Mathematics and Sciences, Northwest University, Shaanxi 710069, China)

Abstract: Huygens has put forward five problems in his book, but without solution. These problems can be regarded as both resolving practice questions and prolongation of the propositions in his book. He advanced the probability questions to generalization, which laid the foundation for further development. This paper attempts to testify these problems by the Huygens' method and compare them modern methods.

Key words: probability; huygens; recursion; expectation; dice.